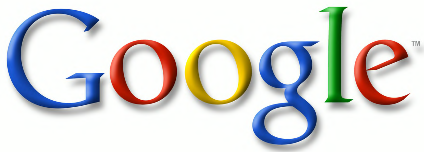


ANNALI

DI

SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

1856

ANNALI
DI SCIENZE
MATEMATICHE E FISICHE

COMPILATI

DA

BARNABA TORTOLINI

Professore di Calcolo Sublime, e Membro del Collegio Filosofico
all'Università Romana, Professore di Fisica Matematica
nel Collegio Urbano e nel Pontificio Seminario Romano,
Socio ordinario della Pontificia Accademia de'Nuovi Lincei,
Uno de'Quaranta della Società Italiana delle Scienze
residente in Modena,
Socio corrispondente dell' Accademia Reale di Torino
dell'Istituto di Bologna,
della Reale Accademia delle Scienze,
e della Pontaniana di Napoli e dell'Accademia di Messina

TOMO SETTIMO

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI
1856

ANNALI
DI SCIENZE
MATEMATICHE E FISICHE

SUL DISCRIMINANTE DELLE FUNZIONI OMOGENEE A DUE INDETERMINATE E SULL'EQUAZIONE AI QUADRATI DELLE DIFFERENZE

NOTA

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

Sia 1.°

$$F(x, y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n \dots$$

una funzione omogenea a due indeterminate, ed $x_1, x_2, \dots x_n$ le n radici dell'equazione $F(x, 1) = 0$. Sia φ una funzione qualunque delle radici $x_1, x_2, \dots$ si avrà:

$$\frac{d\varphi}{dx_s} = \frac{d\varphi}{da_1}\frac{da_1}{dx_s} + \dots + \frac{d\varphi}{da_n}\frac{da_n}{dx_s}$$

e:

$$\sum_s x_s^i \frac{d\varphi}{dx_s} = \frac{d\varphi}{da_1}\sum_s x_s^i \frac{da_1}{dx_s} + \dots + \frac{d\varphi}{da_n}\sum_s x_s^i \frac{da_n}{dx_s}.$$

Ma ponendo:

$$p_m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m}, \; p_0 = 1$$

si ha come è noto:

$$-p_r \frac{da_r}{dx_s} = p_{r-1} a_{r-1} + p_{r-2} a_{r-2} x_s + \dots + p_0 a_0 x_s^{r-1}$$

quindi sostituendo si otterrà:

$$-\sum_s x^i{}_s \frac{d\varphi}{dx_s} = \frac{1}{p_1} k_{i,1} \frac{d\varphi}{da_1} + \frac{1}{p_2} k_{i,2} \frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} k_{i,n} \frac{d\varphi}{da_n}$$

nella quale :

$$k_{i,r} = p_{r-1}\, a_{r-1}\, s_i + p_{r-2}\, a_{r-2}\, s_{i+1} + \ldots + p_0 a_0\, s_{i+r-1}$$

ed :

$$s_m = x^m{}_1 + x^m{}_2 + \ldots + x^m{}_n .$$

Supponiamo ora che φ sia il discriminante della funzione F, cioè sia :

$$\varphi = a_0{}^{2(n-1)} (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2 ;$$

si ha facilmente :

$$\frac{d\varphi}{dx_r} = \varphi \frac{F''(x_r)}{F'(x_r)}$$

ed in conseguenza :

$$\sum_s x^i{}_s \frac{d\varphi}{dx_s} = \varphi \sum_s x^i{}_s \frac{F''(x_s)}{F'(x_s)} .$$

La quantità che moltiplica φ nel secondo membro di questa equazione viene espressa in funzione dei coefficienti a_0 , a_1 . . . , applicando a questo caso una formola da me pubblicata nel giornale del Sig. Crelle (*). Avremo così :

$$\sum_s x^i{}_s \frac{F''(x_s)}{F'(x_s)} = (-1)^{i+1} \frac{1}{a^i{}_0} \begin{vmatrix} q_0\, a_0 & p_0\, a_0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ q_1\, a_1 & p_1\, a_1 & p_0\, a_0 \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ q_{i-2} a_{i-2} & p_{i-2} a_{i-2} & p_{i-3} a_{i-3} \ldots\ldots & p_0 a_0 \\ q_{i-1} a_{i-1} & p_{i-1} a_{i-1} & p_{i-2} a_{i-2} \ldots\ldots & p_1 a_1 \end{vmatrix}$$

nella quale :

$$q_r = (n - r + 1)(n - r) p_r .$$

(*) Sur deux formules relatives à la théorie etc. Vol. 50.

Quindi indicando con Δ_i il determinante del secondo membro dell'equazione superiore si otterrà che il discriminante φ deve soddisfare all'equazioni :

$$(1)\quad \frac{1}{p_1} k_{i,1} \frac{d\varphi}{da_1} + \frac{1}{p_2} k_{i,2} \frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} k_{i,n} \frac{d\varphi}{da_n} = (-1)^i \frac{\varphi}{a_0^i} \Delta_i.$$

Se in questa equazione facciamo $i = 0, 1, 2$ osservando essere :

$$k_{0,r} = (n - r + 1) p_{r-1}\, a_{r-1}\,; \quad k_{1,r} = - r p_r a_r;$$

$$k_{2,r} = \frac{p_r}{a_0}\Big(n a_1 a_r - (n-r) a_0 a_{r+1}\Big)$$

$$\Delta_0 = 0\,, \quad \Delta_1 = n(n-1) a_0\,, \quad \Delta_2 = 2n(n-1) a_0 a_1$$

Si avranno le :

$$(2)\quad \begin{aligned} & a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + n a_{n-1} \frac{d\varphi}{da_n} = 0. \\ & a_1 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_2 \frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + n a_n \frac{d\varphi}{da_n} = n(n-1)\varphi \end{aligned}$$

$$\Big(n a_1^2 - (n-1) a_0 a_2\Big)\frac{d\varphi}{da_1} + \Big(n a_1 a_2 - (n-2) a_0 a_3\Big)\frac{d\varphi}{da_2} + \ldots$$

$$+ n a_1 a_n \frac{d\varphi}{da_n} = 2n(n-1)\, a_1 \varphi.$$

A queste tre equazioni, pel caso del discriminante, si possono ridurre quelle date dal Sig. Cayley come caratteristiche di un invariante della funzione F.

Pel valore di $k_{i,r}$ si hanno facilmente le equazioni :

$$p_n\, a_n\, k_{0,r} + p_{n-1}\, a_{n-1}\, k_{1,r} + \ldots + p_0 a_0\, k_{n,r} = 0$$

$$p_n\, a_n\, k_{1,r} + p_{n-1}\, a_{n-1}\, k_{2,r} + \ldots + p_0 a_0\, k_{n+1,r} = 0 \text{ ec.}$$

per cui evidentemente la equazione (1) non fornisce che n equazioni indipendenti fra loro, le quali si ottengono ponendo nella medesima $i = 0, 1, 2 \ldots n-1$.

2.° Osserviamo che tutti i coefficienti dell' equazione ai quadrati delle differenze soddisfano a due equazioni analoghe alle prime due delle (2). Infatti indichiamo con :

$$x^m + c_1 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \ldots + c_m = 0, \left(m = \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

la equazione ai quadrati delle differenze della $F(x, 1) = 0$; e con S_r la somma delle potenze erresime delle radici di quella equazione. Si ottengono facilmente le :

$$\sum_i \frac{dS_r}{dx_i} = 0, \quad \sum_i x_i \frac{dS_r}{dx_i} = 2rS_r$$

e da queste le :

$$\sum_i \frac{dc_r}{dx_i} = 0, \quad \sum_i x_i \frac{dc_r}{dx_i} = 2rc_r;$$

per cui un coefficiente c_r qualunque soddisferà alle due equazioni :

$$(3) \quad \begin{cases} a_0 \dfrac{dc_r}{da_1} + 2a_1 \dfrac{dc_r}{da_2} + \ldots + na_{n-1} \dfrac{dc_r}{da_n} = 0 \\ a_1 \dfrac{dc_r}{da_1} + 2a_2 \dfrac{dc_r}{da_2} + \ldots + na_n \dfrac{dc_r}{da_n} = 2rc_r. \end{cases}$$

La seconda di queste equazioni mostra che ciascuno dei coefficienti c_1, c_2 . . . . è una funzione omogenea in indici dei coefficienti a_0, a_1 . . . ; e quindi la forma di essi sarà determinata allorquando ne sia conosciuto il grado. Ora vedesi facilmente che c_1, c_2 . . . c_{n-1} saranno rispettivamente dei gradi 2, 4, 6, . . . $2(n-1)$, e che c_n, c_{n+1} . . . c_m saranno tutti del grado $2(n-1)$. Da ciò risulta che fra quei coefficienti non vi è che l'ultimo il quale goda della proprietà di essere invariante della $F(x, y)$. Infatti è noto che una proprietà caratteristica di un invariante è che essendone p il grado, sia il medesimo omogeneo in indice del

grado $\frac{pn}{2}$, cioè indicando con q questo indice sia:

$$q=\frac{pn}{2}.$$

Ora se considerasi un coefficiente c_{n-i}, si ha $p=2(n-i)$, $q=2(n-i)$, e quindi l'equazione superiore richiede sia $n=2$; e se si considera un coefficiente c_{n+i} si ha:

$$p=2(n-1),\ q=2(n+i);$$

quindi

$$i=\frac{n(n-3)}{2},\quad \text{ed}\quad n+i=\frac{n(n-1)}{2};$$

vale a dire l'equazione superiore non sarà soddisfatta che pel coefficiente c_m.

Conoscendosi la forma di un coefficiente qualunque c_r la prima dell'equazioni (3) servirà a determinare in parte i coefficienti numerici di essa forma. A questo scopo alla medesima (3) possiamo aggiungerne molte altre facendo uso del metodo per la calcolazione delle funzioni simmetriche, pubblicato in questi Annali nei fascicoli di Agosto — Novembre 1854; metodo che in questo caso particolare si rende di una semplicissima applicazione come ora mostreremo. Rammentiamo l'equazione fondamentale della nota citata:

$$\frac{p_0}{p_r}a_0\frac{dc_i}{da_r}+\frac{p_1}{p_{r+1}}a_1\frac{dc_i}{da_{r+1}}+\ldots+\frac{p_{n-r}}{p_n}a_{n-r}\frac{dc_i}{da_n}+r\frac{dc_i}{ds_r}=0;$$

ed osserviamo che potendosi supporre:

$$\frac{dc_i}{ds_r}=\frac{dc_i}{dS_1}\frac{dS_1}{ds_r}+\frac{dc_i}{dS_2}\frac{dS_2}{ds_r}+\ldots+\frac{dc_i}{dS_m}\frac{dS_m}{ds_r}.$$

si ha:

$$-\frac{dc_i}{ds_r}=c_{i-1}\frac{dS_1}{ds_r}+\frac{1}{2}c_{i-2}\frac{dS_2}{ds_r}+\ldots+\frac{1}{i}\frac{dS_i}{ds_r}$$

per la quale, quella equazione si trasforma nella seguente:

$$(4)\quad \frac{p_0}{p_r} a_0 \frac{dc_i}{da_r} + \frac{p_1}{p_{r+1}} a_1 \frac{dc_i}{da_{r+1}} + \ldots + \frac{p_{n-r}}{p_n} a_{n-r} \frac{dc_i}{da_n} = r\left(c_{i-1} \frac{dS_1}{ds_r} + \frac{1}{2} c_{i-2} \frac{dS_2}{ds_r} + \ldots + \frac{1}{i} \frac{dS_i}{ds_r}\right).$$

I valori di $\frac{dS_1}{ds_r}$, $\frac{dS_2}{ds_r}$ .... si trovano facilmente mediante la nota formola che dà le somme delle potenze delle radici dell'equazione ai quadrati delle differenze in funzione delle somme delle potenze delle radici della proposta; quindi il secondo membro di quest'ultima equazione si potrà considerare come una funzione conosciuta di a_1, a_2 ... ; e la equazione medesima servirà alla determinazione dei coefficienti numerici. Ponendo p. e. nella (4) $r = 1$ si ha la:

$$(5)\quad \frac{1}{n} a_0 \frac{dc_i}{da_1} + \frac{2}{n-1} a_1 \frac{dc_i}{da_2} + \ldots + \frac{n-1}{2} a_{n-2} \frac{dc_i}{da_{n-1}} + n a_{n-1} \frac{dc_i}{da_n} = -2(c_{i-1} s_1 + c_{i-2} s_3 + \ldots + c_1 s_{2i-3} + s_{2i-1})$$

dalla quale e dalla prima delle (3) si ponno ottenere ordinatamente i coefficienti numerici delle c_1, c_2 .... Però nei casi particolari converrà sciegliere per r i valori n, $n-1$ ec. giacchè questi rendono più breve la calcolazione dei secondi membri.

3.° Col metodo esposto superiormente vennero calcolati alcuni termini dell' equazione ai quadrati delle differenze della $F(x, 1) = 0$.

Ricerca del valore di c_1. Si ha:

$$c_1 = Aa^2_1 + Ba_0a_2 .$$

La prima delle (3) dà:

$$A + B = 0$$

e la (5):

$$\frac{2}{n}A + \frac{2}{n-1}B = \frac{2n}{a^2_0}$$

quindi:

$$c_1 = \frac{n^2(n-1)}{a^2_0}(a_0 a_2 - a^2_1).$$

Ricerca del valore di c_2. Si ha:

$$c_2 = Aa^4_1 + Ba_0 a^2_1 a_2 + Ca^2_0 a_1 a_3 + Da^2_0 a^2_2 + Ea^3_0 a_4.$$

Dalla prima delle (3) si ottiene:

$$2A + B = 0, \quad 2B + 4D + 3C = 0, \quad C + 4E = 0$$

e la (5) dà:

$$\frac{2}{n}A + \frac{1}{n-1}B = -n^3(n-2)\frac{1}{a_0^4},$$

$$\frac{2}{n}B + \frac{4}{n-1}D + \frac{3}{n-2}C = n^2(n-1)(2n-3)\frac{1}{a_0^4}$$

$$\frac{1}{n}C + \frac{4}{n-3}E = n(n-1)(n-2)\frac{1}{a^4_0}$$

per le quali:

$$c_2 = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{2.a^4_0}\left[n^2(a_0a_2 - a^2_1)^2 + \frac{n-3}{2.3}a^2_0(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a^2_2)\right].$$

Analogamente si ottengono i valori di c_3, c_4 . . . ; ed indicando con $I_{r,s}$ l'invariante di grado r d'una funzione omogenea a due indeterminate di grado s^{mo}; ossia ponendo:

$$I_{2,2} = a_0a_2 - a^2_1, \quad I_{2,4} = a_0a_2 - 4a_1a_3 + 3a^2_2,$$

$$I_{2,6} = a_0a_6 - 6a_1a_5 + 15a_2a_4 - 10a^2_3 \text{ ec.}$$

$$I_{3,4} = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a^2_3 - a^2_1 a_4 - a^3_2 \text{ ec.}$$

si hanno le:

$$c_1 = \frac{n^2(n-1)}{a^2_0} I_{2,2} \ldots\ldots$$

$$c_2 = \frac{n^3(n-1)(n-2)}{2a^4_0}\left[n^2 I^2_{2,2} + \frac{n-3}{2.3} a^2_0 I_{2,4}\right]$$

$$c_3 = \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ a^6_0}\left[n^4 I^3_{2,2}\right.$$

$$+ \frac{n^2}{2(n-3)}(n^2-5n+8)a^2_0 I_{2,2} I_{2,4}$$

$$\left. - \frac{n}{2(n-3)}(7n-15)a^3_0 I_{3,4} + \frac{(n-4)(n-5)}{2.\ 5.\ 6} a^4_0 I_{2,6}\right]$$

$$c_4 = \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\ 3.\ 4.\ a^8_0}\left[n^6 I^5_{2,2}\right.$$

$$+ n^4 \frac{n^3 - 8n^2 + 25n - 30}{(n-3)(n-4)} a^2_0 I^2_{2,2} I_{2,4}$$

$$- 2n^3 \frac{7n^2 - 40n + 57}{(n-3)(n-4)} a^3_0 I_{2,2} I_{3,4}$$

$$+ \frac{1}{12} n^2 \frac{n^3 - 7n^2 + 3n + 15}{n-4} a^4_0 I^2_{2,4}$$

$$+ \frac{1}{45} n^2(n^2-7n+26)a^4_0 I_{2,2} I_{2,6} - \frac{2}{3} n(3n-7)a^5_0 X$$

$$\left. + \frac{1}{3.5.7.8} (n-5)(n-6)(n-7)a^6_0 I_{2,8}\right]$$

nella quale la X è la seguente forma del terzo grado:

$$X = a_0 a_2 a_6 + 3a_1 a_2 a_5 - a_1 a_3 a_4 - 3a_0 a_3 a_5$$
$$- a^2_1 a_6 - 3a^2_2 a_4 + 2a_2 a^2_3 + 2a_0 a^2_4.$$

4.° Aggiungiamo una osservazione che può tornar utile

nell'applicazione del metodo sucitato alla calcolazione delle funzioni simmetriche. Ponendo per brevità $p_r a_r = \alpha_r$ si ha, indicando con ψ una funzione qualsiasi, la relazione:

$$\alpha_0 \frac{d\psi}{d\alpha_r} + \alpha_1 \frac{d\psi}{d\alpha_{r+1}} + \dots + \alpha_{n-r} \frac{d\psi}{d\alpha_n} + r \frac{d\psi}{ds_r} = 0$$

Rammentando il metodo con cui venne trovata questa formola, comprendesi facilmente che per $\frac{d\psi}{ds_r}$ devesi intendere la derivata totale di ψ rispetto ad s_r; cioè siccome formando il valore di ψ colle somme delle potenze, potrebbe questo valore contenere s_{n+1}, s_{n+2} .... mentre nella ricerca dell' equazione superiore si è supposto ψ funzione delle sole s_1, s_2 ... s_n; si dovrà nel valore medesimo sostituire per s_{n+1}, s_{n+2}.... i loro valori formati colle s_1, s_2 ... s_n, e quindi formarne la derivata totale rispetto ad s_r. Questa sostituzione, la quale renderebbe il metodo prolisso, si può ovviare osservando che per la medesima risulterebbe:

$$\frac{d\psi}{ds_r} = \left(\frac{d\psi}{ds_r}\right) + \frac{d\psi}{ds_{n+1}} \frac{ds_{n+1}}{ds_r} + \dots + \frac{d\psi}{ds_{n+j}} \frac{ds_{n+j}}{ds_r};$$

essendo $\left(\frac{d\psi}{d s_r}\right)$ la derivata parziale di ψ rispetto ad s_r ed s_{n+j} la somma delle radici di indice maggiore fra quelle che compongono il valore di ψ; e quindi effettivamente abbisognano soltanto i valori di $\frac{ds_{n+1}}{ds_r}$, $\frac{ds_{n+2}}{ds_r}$ .... formati coi coefficienti α_1, α_2, ... Ora:

$$\frac{ds_{n+i}}{ds_r} = (n+i) \sum_s x_s^{n+i-1} \frac{dx_s}{ds_r}$$

ma:

$$\frac{dx_s}{ds_r} = \frac{1}{rF'(x_s)} \left[\alpha_0 x_s^{n-r} + \alpha_1 x_s^{n-r-1} + \dots + \alpha_{n-r} \right]$$

quindi posto:

$$\psi_r(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-r} x^r$$

si ha:

$$\frac{ds_{n+i}}{ds_r} = \frac{n+i}{r} \sum_s \frac{x_s^{\omega-1}\,\psi_r(x_s)}{F'(x_s)}$$

essendo $\omega = n + i - r$. Quindi:

$$(6)\quad \frac{ds_{n+i}}{ds_r} = (-1)^\alpha \frac{n+i}{r} \frac{1}{\alpha_0^{\omega+1}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-r} & \alpha_{n-r} & \alpha_{n-r-1} & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{n-r+1} & \alpha_{n-r} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \alpha_{\omega-1} & \alpha_{\omega-2} & \ldots & \alpha_0 \\ 0 & \alpha_\omega & \alpha_{\omega-1} & \ldots & \alpha_1 \end{vmatrix}$$

nella quale devesi porre $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \ldots = 0$. Ponendo:

$$H_s = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_s & \alpha_{s-1} & \alpha_{s-2} & \ldots & \alpha_1 \end{vmatrix}, \quad H_0 = 1$$

Sviluppando il determinante della (6) si ottiene la espressione più semplice:

$$\frac{ds_{n+i}}{ds_r} = \frac{n+i}{r}\Big[-\frac{\alpha_\omega}{\alpha_0} H_0 + \frac{\alpha_{\omega-1}}{\alpha_0^2} H_1 \ldots \\ + (-1)^i \frac{\alpha_{\omega-i+1}}{\alpha_0^i} H_{i-1}\Big].$$

Abbiamo così p. e.

$$\frac{ds_{n+i}}{ds_1} = (-1)^i (n+i) \frac{\alpha_n}{\alpha^i_0} H_{i-1} \,,$$

$$\frac{ds_{n+i}}{ds_2} = \frac{n+i}{2}\left[(-1)^{i-1} \frac{\alpha_n}{\alpha_0^{\,i-1}} H_{i-2} + (-1)^i \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha^i_0} H_{i-1}\right] \text{ec.}$$

per cui:

$$\frac{ds_{n+1}}{ds_1} = -(n+1)\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\,, \quad \frac{ds_{n+1}}{ds_2} = -\frac{n+1}{2}\,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}\,,$$

$$\frac{ds_{n+2}}{ds_2} = \frac{n+2}{2}\left[-\frac{\alpha_n}{\alpha_0} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha^2_0}\alpha_1\right] \text{ ec.}$$

le quali si ponno verificare direttamente.

Ottobre 1855.

SULLE FUNZIONI OMOGENEE DI TERZO GRADO A DUE INDETERMINATE.

NOTA

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

Considero la forma cubica:

$$f(x, y) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3 \,.$$

Indico con φ il discriminante di essa; cioè:

$$\varphi = 3a^2_1 a^2_2 - 4a_0 a^3_2 - 4a^3_1 a_3 + 6a_0 a_1 a_2 a_3 - a^2_0 a^2_3$$

e posto

$$-\alpha_3 = \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_0}\,, \quad 3\alpha_2 = \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_1}\,, \quad -3\alpha_1 = \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_2}\,, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_3}$$

formo il covariante di terzo grado della $f(x, y)$ ossia:

$$F(x, y) = \alpha_0 x^3 + 3\alpha_1 x^2 y + 3\alpha_2 xy^2 + \alpha_3 y^3 \,.$$

Fra il discriminante φ della forma f ed il discriminante

ψ della F ha luogo la nota relazione dell'Eisenstein:

$$\psi = \varphi^3;$$

essa però non è che conseguenza delle tre relazioni seguenti:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha^2_1 - \alpha_0\alpha_2 &= \varphi(a^2_1 - a_0a_2), \\ \alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 &= \varphi(a_0a_3 - a_1a_2), \\ \alpha^2_2 - \alpha_1\alpha_3 &= \varphi(a^2_2 - a_1a_3); \end{aligned}$$

dalla considerazione delle quali si deducono alcune proprietà che veniamo ad esporre in questa Nota.

Sieno x_1, x_2, x_3 le radici della equazione $f(x, 1)=0$, ed y_1, y_2, y_3 quelle della $F(x, 1)=0$. Pongansi per brevità le seguenti denominazioni:

$$A_1 = a^2_1 - a_0\, a_2, \quad A_2 = a_0a_3 - a_1a_2, \quad A_3 = a^2_2 - a_1a_3$$
$$A' = \alpha^2_1 - \alpha_0\, \alpha_2, \quad A'' = \alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2, \quad A''' = \alpha^2_2 - \alpha_1\alpha_3$$

e le:

$$l_1 = (x_2 - x_3)^2, \qquad l_2 = (x_3 - x_1)^2, \qquad l_3 = (x_1 - x_2)^2,$$
$$m_1 = (x_2 - x_3)^2 x_1, \quad m_2 = (x_3 - x_1)^2 x_2, \quad m_3 = (x_1 - x_2)^2 x_3,$$
$$n_1 = (x_2 - x_3)^2 x^2_1, \quad n_2 = (x_3 - x_1)^2 x^2_2, \quad n_3 = (x_1 - x_2)^2 x^2_3$$

assumendo le lettere λ, μ, ν coi rispettivi accenti per indicare le analoghe quantità formate colle y_1, y_2, y_3. Incomincio dal considerare il gruppo di equazioni:

$$(2) \qquad \begin{aligned} l_1 + l_2 + l_3 &= \frac{18}{a^2_0} A_1, & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \frac{18}{\alpha^2_0} A' \\ l_1l_2 + l_1l_3 + l_2l_3 &= \frac{81}{a^4_0} A^2_1, & \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3 &= \frac{81}{\alpha^4} A'^2 \\ l_1 l_2 l_3 &= \frac{27}{a^4_0}\varphi, & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= \frac{27}{\alpha^4_0}\psi \end{aligned}$$

e dal formare mediante queste le due:

$$b_0x^3 + 3b_1x^2 + 3b_2x + b_3 = 0$$

$$\beta_0x^3 + 3\beta_1x^2 + 3\beta_2x + \beta_3 = 0$$

di cui le radici sieno le l_1, l_2, l_3; λ_1, λ_2, λ_3. Indicando con B_1, B_2, B_3 i binomj:

$$b^2_1 - b_0b_2\,,\quad b_0b_3 - b_1b_2\,,\quad b^2_2 - b_1b_3$$

e con B', B'', B''' gli analoghi binomj formati colle β_0, β_1... si ottengono le:

$$B_1 = \frac{9}{a^4_0}A^2_1\,,\quad B_2 = \frac{27}{a^6_0}(6A^3_1 - a^2_0\varphi)\,,$$

$$B_3 = \frac{81}{a^8_0}A_1(9A^3_1 - 2a^2_0\varphi)$$

$$B' = \frac{9}{\alpha^4_0}A'^2\,,\quad B'' = \frac{27}{\alpha^6_0}(6A'^3 - \alpha^2_0\psi)\,,$$

$$B''' = \frac{81}{\alpha^8_0}A'(9A'^3 - 2\alpha^2_0\psi)$$

e quindi:

$$4B_1B_3 - B^2_2 = \frac{\overline{27}^2}{a_0^{10}}(4A^3_1 - a^2_0\varphi)\varphi\,,$$

$$4B'B''' - B''^2 = \frac{\overline{27}^2}{\alpha_0^{10}}(4A'^3 - \alpha^2_0\psi)\psi\,;$$

ed osservando essere:

$$4A^3_1 - a^2_0\varphi = \alpha^2_0\,,\quad 4A'^3 - \alpha^2_0\psi = a^2_0\psi^4$$

si hanno per le (1) le due relazioni:

$$a^4_0\,\varphi^2\,B_1 = \alpha^4_0\,B'$$

$$a_0^{12}\,\varphi^6(4B_1\,B_3 - B^2_2) = \alpha_0^{12}\,(4B'B''' - B''^2)$$

Dalle quali si deducono le:

$$a^4_0\,\varphi^2(l_2-l_3)^2=\alpha^4_0(\lambda_2-\lambda_3)^2\,,$$

(3) $$a^4_0\,\varphi^2(l_3-l_1)^2=\alpha^4_0(\lambda_3-\lambda_1)^2\,,$$

$$a^4_0\,\varphi^2(l_1-l_2)^2=\alpha^4_0(\lambda_1-\lambda_2)^2\,.$$

Considero in secondo luogo il gruppo di equazioni :

$$m_1+m_2+m_3=\frac{9}{a^2_0}A_2\,,\quad \mu_1+\mu_2+\mu_3=\frac{9}{\alpha^2_0}A''$$

$$m_1 m_2+m_3 m_1+m_2 m_3=\frac{27}{a^4_0}(A^2_2-A_1A_3)\,,$$

(4)

$$\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_1+\mu_2\mu_3=\frac{27}{\alpha^4_0}(A''^2-A'A''')\,,$$

$$m_1 m_2 m_3=-\frac{27}{a^5_0}a_3\varphi\,,\quad \mu_1\mu_2\mu_3=-\frac{27}{\alpha^5_0}\alpha\,\psi\,.$$

Col mezzo di queste formo le due equazioni :

$$c_0x^3+3c_1x^2+3c_2x+c_3=0\,,$$

$$\gamma_0x^3+3\gamma_1x^2+3\gamma_2x+\gamma_3=0$$

di cui le radici sono

$$m_1\,,\ m_2\,,\ m_3\,;\quad \mu_1\,,\ \mu_2\,,\ \mu_3\,,$$

e fatto :

$$C_1=c^2_1-c_0c_2\,,\quad C'=\gamma^2_1-\gamma_0\gamma^2\ \text{ec.}$$

si ottengono le :

$$C_1=\frac{9}{a^4_0}A_1A_3\,,$$

$$4C_1C_3-C^2_2=\frac{\overline{27}^2}{a_0^{12}}(A^2_1A^2_3-2a_1a_2A_1A_2A_3-a^2_1a^2_2\varphi)\varphi$$

$$C'=\frac{9}{\alpha^4_0}A'A'''\,,$$

$$4C'C'''-C''^2=\frac{\overline{27}^2}{\alpha_0^{12}}(A'^2A'''^2-2\alpha_1\alpha_2A'A''A'''-\alpha^2_1\alpha^2_2\psi)\psi$$

le quali per le (1) e per la :

$$\alpha_1\alpha_2 + a_1 a_2 \varphi + 2A_1A_2A_3 = 0$$

danno le :

$$a^4_0 \varphi^2 C_1 = \alpha^4_0 C' ,$$

$$a_0^{12} \varphi^6(4C_1C_3 - C^2_2) = \alpha_0^{12}(4C'C''' - C''^2)$$

e quindi

$$(5) \qquad \begin{aligned} a^4_0\varphi^2(m_2 - m_3)^2 &= \alpha^4_0(\mu_2 - \mu_3)^2 , \\ a^4_0\varphi^2(m_3 - m_1)^2 &= \alpha^4_0(\mu_3 - \mu_1)^2 , \\ a^4_0\varphi^2(m_1 - m_2)^2 &= \alpha^4_0(\mu_1 - \mu_2)^2 . \end{aligned}$$

Considerando da ultimo le equazioni :

$$(6) \qquad \begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 &= \frac{18}{a^2_0} A_3 , \quad \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \frac{18}{\alpha^2_0} A''' \\ n_1n_2 + n_3n_1 + n_2n_3 &= \frac{81}{a^4_0} A^2_3 , \quad \nu_1\nu_2 + \nu_3\nu_1 + \nu_2\nu_3 = \frac{81}{\alpha^4_0} A'''^2 \\ n_1\, n_2\, n_3 &= \frac{27}{a^6_0}\, a^2_3\varphi , \quad \nu_1\, \nu_2\, \nu_3 = \frac{27}{\alpha^6_0}\, \alpha^2_3\, \phi \end{aligned}$$

e formando le equazioni :

$$d_0x^3 + 3d_1x^2 + 3d_2x + d_3 = 0$$

$$\delta_0x^3 + 3\delta_1x^2 + 3\delta_2x + \delta_3 = 0$$

aventi per radici n_1 , n_2 , n_3 ; ν_1 , ν_2 , ν_3 ; fatto

$$D_1 = d^2_1 - d_0d_2 , \quad D' = \delta^2_1 - \delta_0\delta_2 \text{ ec.}$$

osservando alle (1) ed alla :

$$4A^3_3 - \alpha^2_3 = a^2_3\varphi$$

si hanno le :

$$a^4_0 \varphi^2 D_1 = \alpha^4_0 D'$$

$$a_0^{12} \varphi^6(4D_1D_3 - D^2_2) = \alpha_0^{12}(4D'D''' - D''^2)$$

per le quali :

$$a^4{}_0\, \varphi^2(n_2 - n_3)^2 = \alpha^4{}_0(\nu_2 - n_3)^2,$$

(7) $$a^4{}_0\, \varphi^2(n_3 - n_1)^2 = \alpha^4{}_0(\nu_3 - \nu_1)^2\,,$$

$$a^4{}_0\, \varphi^2(n_1 - n_2)^2 = \alpha^4{}_0(\nu_1 - \nu_2)^2\,.$$

Le equazioni (3), (5), (7) ; avendo riguardo ai gruppi (2), (4), (6) danno origine alle :

$$a^2{}_0\, \varphi\, l_1 = \frac{\alpha^2{}_0}{3}(-\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3)\,,$$

$$a^2{}_0\, \varphi\, m_1 = \frac{\alpha^2{}_0}{3}(-\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3)\,,$$

$$a^2{}_0\, \varphi\, n_1 = \frac{\alpha^2{}_0}{3}(-\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3)\,,$$

$$a^2{}_0\, \varphi\, l_2 = \frac{\alpha^2{}_0}{3}(2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3),$$

$$a^2{}_0\, \varphi\, m_2 = \frac{\alpha^2{}_0}{3}(2\mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3)\,,$$

$$a^2{}_0\, \varphi\, n_2 = \frac{\alpha^2{}_0}{3}(2\nu_1 - \nu_2 + 2\nu_3)\,,$$

$$a^2{}_0\, \varphi\, l_3 = \frac{\alpha^3{}_0}{3}(2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3)\,,$$

$$a^2{}_0\, \varphi\, m_3 = \frac{\alpha^2{}_0}{3}(2\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_2)\,,$$

$$a^2{}_0\, \varphi\, n_3 = \frac{\alpha^2{}_0}{3}(2\nu_1 + 2\nu_2 - \nu_3)\,.$$

Per mezzo di queste relazioni dimostrasi facilmente un teorema enunciato recentemente dal Sig. Hermite nel Quarterly Journal; cioè che le due forme quadratiche :

$$g = a^2{}_0\,[l\,(x_2 - x_3)^2(x - x_1 y)^2 + m(x_3 - x_1)^2(x - x_2 y)^2 + n(x_1 - x_2)^2(x - x_3 y)^2]$$

$$G = \alpha^2{}_0\,[\lambda\,(y_2 - y_3)^2(x - y_1 y)^2 + \mu(y_3 - y_1)^2(x - y_2\, y)^2 + \nu(y_1 - y_2)^2(x - y_3 y)^2]$$

nelle quali l, m, n ; λ, μ, ν sono costanti arbitrarie ; godono della singolare proprietà di essere :

$$G = g.\varphi$$

assumendo :

$$\lambda = -l + \frac{2}{3}(l + m + n)$$

$$\mu = -m + \frac{2}{3}(l + m + n)$$

$$\nu = -n + \frac{2}{3}(l + m + n).$$

Ottobre 1855.

MÉMOIRE

SUR LE MOUVEMENT DE LA TERRE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ.

PAR LE P. M. JULLIEN S. J.

La théorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité a été considérée jusqu' ici comme un des points les plus difficiles de la mécanique céleste. Dernièrement M. Poinsot a montré comment la méthode des couples conduit, par une voie simple et lumineuse, à des formules qui représentent le mouvement de l'axe terrestre d'une manière approchée, quant à ses traits les plus apparents; mais l'analyse difficile de Laplace est restée la voie la plus simple pour arriver aux formules qui représentent le phénomène dans tous les détails que l'observation peut saisir.

Le problème de la détermination exacte du mouvement de la Terre autour de son centre prenant de jour en jour plus d'intéret à mesure que l'astronomie stellaire se déve-

loppe, il m'a paru utile de chercher une solution plus simple que celles qui ont été données jusqu' ici. La méthode des couples m'a fourni cette solution : sans avoir recours à d'autre théorème que celui de la composition des couples suivant la loi du parallélogramme, j' arrive, par des calculs très simples, non seulement aux formules de Laplace, mais aussi aux formules plus complètes données par Bessel, dont les astronomes se servent actuellement dans les recherches qui exigent la plus grande précision.

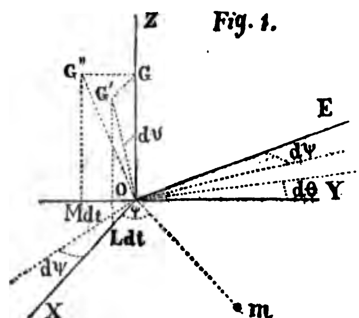
I.

Je reprends la question dès le principe.

Dans le calcul du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, on peut sans erreur appréciable, considérer les masses du Soleil et de la Lune comme réunies à leurs centres de gravité respectifs. On est donc conduit à calculer les moments de l' attraction exercée sur la Terre par un point matériel fort éloigné, autour des axes principaux d' inertie qui se coupent au centre de gravité du corps attiré.

Dans toute la suite des calculs nous regarderons comme positives les rotations qui s'effectuent de droite à gauche, suivant l'usage des astronomes; nous étendrons cette convention aux moments des forces et aux moments des couples. Nous ne ferons d'abord aucune hypothèse sur la constitution de la Terre.

Soient (Fig. 1.)



OX, OY, OZ trois axes coordonnés, dirigés suivant les axes principaux d'inertie de la Terre relatifs au centre de gravité;

x', y', z' les coordonnées d'une molécule de la Terre;

dm' la masse de cette molécule;

x, y, z les coordonnées du point attirant, lequel est très éloigné de l'origine;

r la distance de ce point au centre de gravité de la Terre ;

r' la distance du même point à la molécule dm' ;

m le produit de la masse du même point par la constante qui mesure l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance;

X, Y, Z les composantes de l'attraction exercée par le point sur la Terre, dirigées suivant les axes OX, OY, OZ;

L, M, N les moments de cette attraction autour des axes OX, OY, OZ.

Nous avons d'abord

$$X = m\int \frac{x-x'}{r'^3}\,dm', \quad Y = m\int \frac{y-y'}{r'^3}\,dm',$$

$$Z = m\int \frac{z-z'}{r'^3}\,dm',$$

les intégrales s'étendant à toutes les molécules de la Terre. Il s'ensuit

$$L = Zy - Yz = mz\int \frac{y'}{r'^3}\,dm' - my\int \frac{z'}{r'^3}\,dm',$$

$$M = Xz - Zx = mx\int \frac{z'}{r'^3}\,dm' - mz\int \frac{x'}{r'^3}\,dm',$$

$$N = Yx - Xy = my\int \frac{x'}{r'^3}\,dm' - mx\int \frac{y'}{r'^3}\,dm'.$$

Or

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3}\left[1 - \left(2\frac{x}{r}\frac{x'}{r} + 2\frac{y}{r}\frac{y'}{r} + 2\frac{z}{r}\frac{z'}{r} - \frac{x'^2}{r^2} - \frac{y'^2}{r^2} - \frac{z'^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{3}{2}};$$

si nous développons la puissance fractionnaire par la formule du binôme, et que nous négligions dans ce développement les termes qui contiennent les secondes puissances des rapports très-petits $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$, vis-à-vis des rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, qui sont comparables à l'unité, il reste

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\,\frac{xx' + yy' + zz'}{r^2}\right).$$

Substituant cette valeur dans les expressions des moments L, M, N, et nommant A, B, C les moments d'inertie principaux de la Terre autour des axes OX, OY, OZ, il vient

$$L = \frac{3m(C-B)}{r^5}\,yz,\quad M = \frac{3m(A-C)}{r^5}\,zx,\quad N = \frac{3m(B-A)}{r^5}\,xy.$$

II.

Actuellement ayons égard à ce que l'observation et la théorie nous apprennent sur la constitution de la Terre.

Le centre de gravité de la Terre étant supposé fixe, le mouvement du globe est une rotation autour d'un axe qui paraît absolument fixe dans ce corps, bien qu'il se déplace d'une manière sensible dans l'espace. De plus, la forme de la Terre diffère peu de la forme sphérique; et rien ne porte à croire que les éléments de masse situés à une même distance du centre aient des densités fort inégales. Nous pouvons donc admettre que les différences entre les moments d'inertie principaux, et, par suite, les moments L, M, N sont peu considérables vis-à-vis de la masse de la Terre. Or, si l'axe de rotation de la Terre était réellement fixe dans ce corps, et les moments L, M, N tout-à-fait nuls, l'axe de rotation serait un axe principal d'inertie, selon la propriété caractéristique dont jouissent les axes principaux d'inertie d'être axes permanents de rotation. D'après cela,

nous pouvons supposer, sans qu'il en résulte une erreur sensible, que la rotation de la Terre s'effectue autour d'un axe principal d'inertie.

La figure de la Terre est celle d'un solide de révolution autour de son axe de rotation, et tout porte à croire que les deux axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité, qui sont situés dans le plan de l'équateur, ont des moments égaux. Nous prendrons l'équateur pour plan XOY, et nous poserons

$$B = A.$$

L'aplatissement de la Terre vers les pôles nous conduit à supposer encore

$$C > A.$$

Ainsi nous avons

$$L = \frac{3m(C - A)}{r^5} yz, \quad M = -\frac{3m(C - A)}{r^5} zx, \quad N = 0.$$

III.

Dorénavant nous prendrons l'axe OX constamment dirigé vers l'équinoxe de printemps, et l'axe OY dirigé du côté du solstice d'été. Ces deux axes ne cesseront pas d'être axes principaux d'inertie de la Terre.

Nous déterminerons le mouvement par la méthode de la composition des couples. Les couples L et M, en agissant pendant l'instant infiniment petit dt, communiquent à la Terre deux vitesses de rotation infiniment petites, autour des axes OX et OY. Les quantités de mouvement qui naissent de ces vitesses de rotation ont pour moments, autour des mêmes axes, les produits Ldt et Mdt; car les moments des forces effectives sont égaux aux moments des forces appliquées.

Ainsi, les quantités de mouvement que possède la Terre à la fin de l'instant dt, considérées comme des forces, et

transportées à l'origine, donnent naissance à trois couples autour des trois axes OX, OY, OZ. Les deux premiers couples ont leurs moments égaux à Ldt, Mdt; le troisième est le couple des quantités de mouvement qui animaient la Terre au commencement de l'instant considéré. Si l'on représente par G le moment de ce dernier couple, et que l'on nomme ρ la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe, on a

$$G = \rho C.$$

Ces trois couples se composent en un seul. Si l'on convient de représenter chaque couple par une droite dirigée suivant l'axe et proportionnelle au moment, le couple résultant dont il s'agit sera représenté, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur les axes OX, OY, OZ avec des longueurs proportionnelles à Ldt, Mdt, G. Les deux premières arêtes du parallélipipède étant infiniment petites en comparaison de la troisième, la diagonale fera un angle infiniment petit avec la troisième arête, et, par suite, elle aura même longueur. D'ailleurs la direction de la diagonale sera celle de l'axe de révolution du globe terrestre à la fin de l'instant dt, puisque nous admettons que la rotation de la Terre s'effectue à chaque instant autour de son axe de figure. Les attractions du Soleil et de la Lune dévient donc l'axe de la Terre, à chaque instant, sans changer la vitesse de rotation autour de cet axe.

Nous étudierons isolément le déplacement qui serait produit par chacun des couples moteurs, si ce couple agissait seul. La somme algébrique de ces déplacements sera le déplacement résultant de l'action simultanée de tous les couples, aux quantités près de l'ordre du carré des moments des couples accélérateurs. Mais, avant d'entreprendre cette étude, il est convenable de mettre les produits Ldt, Mdt sous une forme nouvelle.

IV.

Soient

a la distance moyenne de la Terre au Soleil ;

e l'excentricité de l'orbite terrestre ;

n le moyen mouvement de la Terre dans son orbite ;

v la longitude géocentrique du Soleil;

ϖ la longitude du périgée ;

h le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil.

La théorie du mouvement elliptique, appliquée au mouvement apparent du Soleil autour du centre de la Terre, donne les formules

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)},\quad r^2dv = na^2\sqrt{(1-e^2)}.dt,\quad m(1+h) = n^2a^3.$$

On en tire

$$\frac{m}{r^3}\,dt = \frac{n[1+e\cos(v-\varpi)]}{(1+h)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,dv\,;$$

et, par suite, on a

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{L}dt = \dfrac{3n(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{(1+h)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,\dfrac{yz}{r^2}\,[1+e\cos(v-\varpi)]dv\,, \\[2ex] \mathrm{M}dt = -\,\dfrac{3n(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{(1+h)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,\dfrac{zx}{r^2}\,[1+e\cos(v-\varpi)]dv. \end{cases}$$

Ces formules s'appliquent à la Lune comme au Soleil, en conservant aux lettres qui y figurent la même signification relativement à la Terre.

V.

ACTION DU SOLEIL.

Il nous faut substituer aux coordonnées rectangulaires du Soleil la distance *r*, la longitude *v*, et l'obliquité θ de l'équateur XOY sur l'écliptique XOE (Fig. 1.).

Les formules de transformation sont les suivantes :

$$x = r \cos v\ ,\ \ y = r \cos \theta \sin v\ ,\ \ z = r \sin \theta \sin v.$$

Elles donnent

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{yz}{r^2} &= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta (1 - \cos 2v)\ , \\ \frac{zx}{r^2} &= \frac{1}{2} \sin \theta \sin 2v. \end{aligned} \right.$$

1.° *Couple* L. — Composant d'après la loi du parallélogramme le couple Ldt avec le couple G, on obtient un nouveau couple, dont l'axe OG′ représente la position que prendrait l'axe terrestre à la fin de l'instant dt, si le couple L agissait seul. Ainsi, par l'effet du couple L, l'axe terrestre ou la perpendiculaire à l'équateur tourne pendant l'instant dt d'un angle infiniment petit dv autour du rayon OY de l'équateur. Ce rayon étant perpendiculaire à l'intersection de l'équateur et de l'écliptique, il s'ensuit que la rotation dv a pour unique effet de déplacer l'intersection de l'équateur sur l'écliptique, sans changer l'angle des deux plans.

Soit $d\psi$ l'angle dont la ligne des équinoxes a rétrogradé en tournant dans le plan de l'écliptique.

Cet angle est le même que l'angle décrit par la projection de l'axe terrestre sur l'écliptique, car cette projection est constamment perpendiculaire à la ligne des équinoxes. Il s'ensuit qu'on a l'équation

$$d\psi = \frac{dv}{\sin \theta}.$$

D'ailleurs, en négligeant les puissances de dv supérieures à la première, le triangle GOG′ donne

$$dv = \frac{\mathrm{L}dt}{\mathrm{G}};$$

par conséquent,

$$d\psi = \frac{\mathrm{L}dt}{\mathrm{G}\sin\theta} \quad \text{ou} \quad d\psi = \frac{\mathrm{L}dt}{\rho\mathrm{C}\sin\theta}.$$

Si l'on substitue ici les valeurs (1) et (2), en négligeant le rapport h dont la valeur est au plus $\frac{1}{350000}$, et que l'on pose, pour abréger,

$$\frac{3}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{n}{\rho}\,\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}} = \mathrm{H},$$

il vient

$$d\psi = \mathrm{H}\cos\theta\,(1-\cos 2v)[1+e\cos(v-\varpi)]dv.$$

Soit prise l'origine du temps à l'équinoxe de printemps pour une année déterminée, et soit ψ l'angle dont la ligne des équinoxes a rétrogradé sur le plan de l'écliptique depuis l'origine du temps.

Cet angle ψ sera fourni par l'intégration de l'équation précédente; mais, comme cet angle varie avec une lenteur excessive, on pourra, sans erreur sensible, négliger dans ce calcul les variations de l'angle θ, lesquelles ne s'élèvent pas à plus de $10''$ de part et d'autre de la valeur moyenne. On pourra négliger encore, parmi les termes périodiques de l'intégrale, ceux qui contiennent en facteur l'excentricité e.

Si donc on remplace l'angle variable θ par un angle constant θ', dont la valeur soit comprise entre les valeurs extrêmes de l'angle θ, on obtient

$$\psi = \mathrm{H}\cos\theta'\left(v - \frac{1}{2}\sin 2v\right),$$

ou bien, puisque la longitude v est égale à nt plus des termes périodiques qui contiennent l'excentricité en facteur,

$$(3) \qquad \psi = \mathrm{H}\,n\cos\theta'.t - \frac{1}{2}\mathrm{H}\cos\theta'\sin 2v.$$

Cet angle ψ mesure la *précession solaire* des équinoxes. Il se compose de deux parties : l'une croît proportionnellement au temps, c'est la *précession solaire moyenne*; l'autre se reproduit périodiquement de six mois en six mois, et, par suite, elle est beaucoup moins sensible.

2.° *Couple* M. — Composant le couple $\mathrm{M}dt$ avec le couple G, on obtient un nouveau couple, dont l'axe OG″ représente la position que prendrait l'axe terrestre à la fin de l'instant dt, si le couple M agissait seul. On voit que l'effet de ce couple pendant l'instant dt se réduit à faire varier l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique, d'un angle

$$\mathrm{GOG}'' = d\theta = \frac{\mathrm{M}dt}{\mathrm{G}} = -\mathrm{H}\sin\theta\sin 2v\,[1+e\cos(v-\varpi)]dv.$$

En intégrant avec le même degré d'approximation que dans le calcul de l'angle ψ, on trouve

$$(4) \qquad \theta = \theta' + \frac{1}{2}\mathrm{H}\sin\theta'\cos 2v,$$

pourvu que l'on attribue une valeur convenable à la constante θ'.

La différence $\theta - \theta'$ mesure la *nutation solaire* de l'axe terrestre. Cette nutation a une période semi-annuelle; elle est peu sensible.

VI.

ACTION DE LA LUNE.

Occupons-nous maintenant de la Lune. Conservons aux lettres qui figurent dans les formules précédentes la même signification relative à la Terre; mais marquons de l'indice 1 celles qui se rapportent à la Lune, de manière que, par exemple, h étant le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil, h_1 soit le rapport de la masse de la Terre à celle de la Lune.

En outre, nommons i l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, et λ la longitude du noeud ascendant de la Lune.

Nous avons, d'après les formules (1),

$$L_1 dt = \frac{3n_1(C-A)}{(1+h_1)(1-e^2_1)^{\frac{3}{2}}} \frac{y_1 z_1}{r^2_1}[1 + e_1\cos(v_1 - \varpi_1)]dv_1,$$

$$M_1 dt = -\frac{3n_1(C-A)}{(1+h_1)(1-e^2_1)^{\frac{3}{2}}} \frac{z_1 x_1}{r^2_1}[1 + e_1\cos(v_1 - \varpi_1)]dv_1,$$

x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées de la Lune par rapport aux axes OX, OY, OZ.

Il nous faut exprimer ces cordonnées en fonction de la longitude de la Lune. Pour cela figurons (Fig. 2.) une sphère décrite du centre de gravité de la Terre comme centre avec un rayon égal à l'unité ; et marquons sur cette sphère la trace m_1 du rayon vecteur de la Lune, l'équateur XY, l' écliptique XN et l'orbite lunaire Nm_1. L'arc XN sera la longitude du noeud, et la somme des deux arcs XN, Nm_1, non situés dans un même plan, sera la longitude de la Lune, ou v_1.

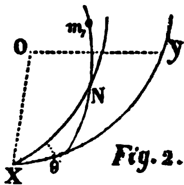


Fig. 2.

Nous cherchons les valeurs des coordonnées en vue de les substituer dans les expression de $\frac{L_1}{G}dt$ et de $\frac{M_1}{G}dt$, lesquelles contiennent en facteur le produit $\frac{1}{1+h_1}\frac{n_1}{\rho}\frac{C-A}{C}$ qui est certainement très-petit. Il est donc inutile de calculer ces valeurs fort exactement. Aussi nous négligerons dans ce calcul le cube de l'angle i, angle dont la valeur est à peu près 5° 9′ ou $\frac{1}{11}$ du rayon.

Soient x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées de la Lune, prises

par rapport à trois axes dont l'origine est au centre de la Terre, et qui sont dirigés, le premier suivant la direction OX de l'équinoxe de printemps, le second suivant une perpendiculaire située dans le plan de l'écliptique, et le troisième suivant une perpendiculaire à l'écliptique.

Nous avons d'abord

$$x'_1 = r_1\left[\cos\lambda \cos(v_1 - \lambda) - \sin\lambda \sin(v_1 - \lambda)\cos i\right]$$

$$= r_1\left[\cos v_1 + \frac{i^2}{2}\sin\lambda \sin(v_1 - \lambda)\right],$$

$$y'_1 = r_1\left[\sin\lambda \cos(v_1 - \lambda) + \cos\lambda \sin(v_1 - \lambda)\cos i\right]$$

$$= r_1\left[\sin v_1 - \frac{i^2}{2}\cos\lambda \sin(v_1 - \lambda)\right],$$

$$z'_1 = r_1 i \sin(v_1 - \lambda);$$

puis, par les formules de transformation des coordonnées en géometrie plane,

$$x_1 = x'_1,$$

$$y_1 = y'_1 \cos\theta - z'_1 \sin\theta,$$

$$z_1 = y'_1 \sin\theta + z'_1 \cos\theta.$$

Il ne reste plus qu'à substituer les expressions précédentes de x'_1, y'_1, z'_1 dans ces dernières formules, et nous aurons les valeurs cherchées.

Actuellement nous devons calculer les produits $\frac{y_1 z_1}{r^2_1}$, $\frac{z_1 x_1}{r^2_1}$ qui figurent dans les expressions des moments des

couples accélérateurs, et, dans ce calcul, nous devons encore négliger les puissances de i supérieures à la seconde. Nous trouvons

$$\frac{y_1 z_1}{r_1^2} = \sin\theta\cos\theta\sin^2 v_1 + i(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin v_1 \sin(v_1 - \lambda)$$
$$- i^2 \sin\theta\cos\theta\cos\lambda\sin v_1 \sin(v_1 - \lambda),$$

$$\frac{z_1 x_1}{r_1^2} = \sin\theta\sin v_1 \cos v_1 + i\cos\theta\cos v_1 \sin(v_1 - \lambda)$$
$$- \frac{i^2}{2}\sin\theta\sin(v_1 - \lambda)\cos(v_1 + \lambda).$$

1.° *Couple* L_1. — Si l'on nomme ψ l'angle dont rétrograde la ligne des équinoxes pendant le temps t, en vertu de l'action du couple L_1, on a l'équation

$$d\psi = \frac{L_1 dt}{G\sin\theta}.$$

Posant

$$\frac{3}{2(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{n_1}{\rho}\,\frac{C-A}{C} = H_1,$$

cette équation peut s'écrire

$$d\psi = \frac{2H_1}{1+h_1}\,\frac{y_1 z_1}{r_1^2 \sin\theta}\,[1 + e_1\cos(v_1 - \varpi_1)]\,dv_1;$$

et il faut concevoir que le rapport $\frac{y_1 z_1}{r_1^2}$ soit ici remplacé par la valeur obtenue précédemment.

Dans l'intégration qui doit donner l'angle ψ, nous pourrons regarder comme constants, non seulement l'angle θ, mais aussi l'angle i; car l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique varie extremement peu. Nous négligerons encore les termes périodiques qui sont multipliés par l'excentricité e_1; en sorte que nous pourrons remplacer v_1 par $n_1 t$ + const. Quant à la longitude de noeud, λ, nous savons

qu'elle diminue d'une circonférence en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ, d'un mouvement à peu près uniforme; par suite, nommant $-\alpha$ la vitesse angulaire moyenne du noeud, nous pourrons remplacer λ par $-\alpha t +$ const.

Ceci posé, il suffit de remplacer, dans l'expression de $d\psi$, les produits de sinus variables par les cosinus de la somme et de la différence des arcs, et l'intégration se fera immédiatement. Mais, parmi les termes périodiques de la différentielle, outre que nous négligerons ceux qui sont multipliés par e_1, nous négligerons encore ceux qui dépendent de v_1 et qui sont multipliés par i; car l'intégrale de ces derniers termes aura en diviseur le nombre n_1, tandis que l'intégrale des termes qui dépendent seulement de λ aura en diviseur le nombre α, lequel est beaucoup plus petit que n_1.

La différentielle $d\psi$ se réduit donc à la valeur suivante:

$$(5) \quad d\psi = \frac{H_1}{1+h_1}\left[\cos\theta' - \cos\theta' \cos 2v_1 + i\,\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\cos\lambda - \frac{i^2}{2}\cos\theta'\,(1+\cos 2\lambda)\right]dv_1\,.$$

L'intégrale est

$$(6) \quad \psi = \frac{H_1}{1+h_1}\left[n_1\left(1-\frac{i^2}{2}\right)\cos\theta'.t - \frac{1}{2}\cos\theta'\sin 2v_1 - i\,\frac{n_1}{\alpha}\,\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sin\lambda + \frac{i^2}{4}\,\frac{n_1}{\alpha}\cos\theta'\sin 2\lambda\right].$$

Cet angle ψ mesure la *précession lunaire* des équinoxes; le premier terme croît proportionnellement au temps, il mesure la *précession lunaire moyenne*. Parmi les autres termes, le plus sensible est le terme en $\sin\lambda$, c'est-à-dire celui dont la période est égale à la durée de la révolution du noeud de la Lune.

2.° *Couple* M_1. — Si l'on nomme $d\theta$ la variation de l'obliquité de l'équateur qui est due à l'action du couple M_1

agissant pendant l'instant dt, on a

$$d\theta = \frac{M_1\, dt}{G}.$$

En opérant comme pour le calcul de ψ, on réduit la différentielle $d\theta$ à la valeur suivante :

$$(7)\quad d\theta = \frac{H_1}{1+h_1}\left(-\sin\theta'\sin 2v_1 + i\cos\theta'\sin\lambda - \frac{i^2}{2}\sin\theta'\sin 2\lambda\right)dv_1\,;$$

et, si l'on détermine convenablement la constante θ', l'intégrale est

$$(8)\quad \theta = \theta' + \frac{H_1}{1+h_1}\left(\frac{1}{2}\sin\theta'\cos 2v_1 + i\frac{n_1}{\alpha}\cos\theta'\cos\lambda - \frac{i^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\sin\theta'\cos 2\lambda\right).$$

La différence $\theta-\theta'$ mesure la *nutation lunaire* de l'axe terrestre. Le terme en $\cos\lambda$ est le plus sensible; l'ensemble de ce terme et du terme en $\sin\lambda$ qui figure dans la formule (6) exprime que l'axe terrestre décrit une petite ellipse sur la sphère céleste. Le centre de cette ellipse marque constamment la position moyenne de l'axe terrestre qui est définie par l'angle θ' et par la précession moyenne totale; le grand axe de l'ellipse est constamment dirigé vers le pôle de l'écliptique; la courbe est décrite en sens contraire de la rotation de la Terre autour de son axe; elle est parcourue dans le même temps que le noeud de la Lune fait le tour de l'écliptique, et d'un mouvement tel que l'anomalie excentrique λ croît proportionnellement au temps.

VII.

CORRECTION DUE AU DÉPLACEMENT DE L'ÉCLIPTIQUE.

En égalant l'angle ψ à la somme des deux parties (3) et (6), et égalant de même l'angle $\theta-\theta'$ à la somme des deux parties (4) et (8), on obtient des formules qui représentent avec exactitude le mouvement de l'axe terrestre pendant

un petit nombre d'années. Mais, si l'on veut des formules qui représentent pendant deux on trois siècles tout ce que les observations les plus exactes peuvent accuser relativement au mouvement de rotation de la Terre, il est nécessaire d'avoir égard au déplacement de l'écliptique, produit par l'attraction des planètes.

Comme l'écliptique se déplace fort peu pendant le petit nombre de siècles que l'on prétend embrasser, il n'y a pas lieu de recommencer les calculs qui ont été faits en considérant ce plan comme fixe; il suffira de corriger légèrement les formules par des termes additionnels.

Dans ce calcul nous continuerons de rapporter le mouvement de l'axe terrestre au plan fixe qui coïncide avec l'*écliptique vrai* à l'origine du temps t. Nous appellerons ce plan fixe l'*écliptique fixe*. L'angle ψ sera toujours l'angle dont l'intersection de l'équateur et de l'écliptique fixe a rétrogradé sur ce dernier plan, depuis l'époque prise pour origine du temps, θ désignera toujours l'angle compris entre l'équateur et l'écliptique fixe. En outre, nous nommerons γ l'inclinaison de l'écliptique vrai sur l'écliptique fixe, et β l'angle qui sépare les traces de l'équateur et de l'écliptique vrai sur l'écliptique fixe.

1.° *Action du Soleil.* — Le mouvement du Soleil autour de la Terre, sur l'écliptique mobile, est tout semblable au mouvement que la Lune exécute autour de la Terre dans l'hypothèse d'un écliptique immobile. Par conséquent, des calculs tout pareils à ceux du paragraphe précédent conduisent à des formules semblables aux formules (5) et (7), sauf que i est remplacé par γ, et λ par β, outre que l'indice $_1$ est supprimé. Dans ces formules, les termes indépendants de γ sont ceux qu'on a déja obtenus en supposant l'écliptique immobile, les termes en γ^2 peuvent être négligés sans erreur appréciable; donc les termes qu'il faut ajouter aux valeurs (3) et (4) des angles ψ et θ, quand on veut avoir égard au déplacement de l'écliptique, se réduisent aux intégrales des seuls termes qui contiennent la première puissance de γ dans

les formules correspondantes aux formules (5) et (7). Ces termes additionnels sont, pour l'angle ψ

$$\mathrm{H}n\,\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\int\gamma\cos\beta\,dt,$$

pour l'angle θ

$$\mathrm{H}n\cos\theta'\int\gamma\sin\beta\,dt.$$

Or la théorie des inégalités séculaires du mouvement des planètes autour du Soleil donne les relations

$$\gamma\cos(\beta-\psi)=\Sigma k\cos(gt+\delta),$$
$$\gamma\sin(\beta-\psi)=\Sigma k\sin(gt+\delta),$$

dans lesquelles k, g, δ représentent des constantes qui dépendent des différentes planètes perturbatrices, et Σ indique une somme relative à toutes ces planètes. On tire de ces relations

$$\gamma\cos\beta=\Sigma k\cos(gt+\psi+\delta),$$
$$\gamma\sin\beta=\Sigma k\sin(gt+\psi+\delta).$$

Les coefficients k étant tous très-petits, on peut remplacer l'angle ψ par sa valeur moyenne, dans les expressions de $\gamma\cos\beta$ et de $\gamma\sin\beta$. D'après l'observation, ou d'après les formules obtenues en supposant l'écliptique immobile, cette valeur moyenne augmente à peu près de 50″, 3 en une année.

Si donc on prend l'année pour unité de temps, les angles ψ et θ qui résultent de l'action du Soleil, quand on a égard au déplacement de l'écliptique, sont donnés par les formules

$$(9)\qquad \psi=\mathrm{H}n\cos\theta'.t-\frac{1}{2}\mathrm{H}\cos\theta'\sin 2v$$
$$+\mathrm{H}n\,\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sum\frac{k}{g+50''3}\sin\left[(g+50'',3)\,t+\delta\right],$$

$$(10) \qquad \theta = \theta' + \frac{1}{2} \text{H} \sin \theta' \cos 2v$$

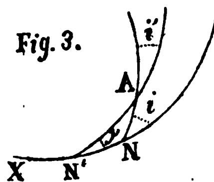
$$- \text{H}n \cos \theta' \sum \frac{k}{g + 50'',3} \cos [(g + 50'', 3)t + \delta].$$

2.° *Action de la Lune.*—Soient i' l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique vrai, et λ' la longitude du noeud de la Lune, comptée sur l'écliptique vrai.

Les seuls termes des formules (5) et (7) qui soient altérés par le déplacement de l'écliptique, sont ceux qui contiennent les angles i et λ. Quand on néglige le carré de l'angle γ, les termes en i^2 ne subissent pas d'autre altération que le changement de i et de λ en i' et en λ'; les termes

$$\frac{\text{H}_1}{1 + k_1} i \frac{\cos 2\theta'}{\sin \theta'} \cos \lambda \, dv_1, \quad \frac{\text{H}_1}{1 + k_1} i \cos \theta' \sin \lambda \, dv_1$$

éprouvent une altération plus complexe. Pour la calculer, il faut exprimer les produits $i \cos \lambda$ et $i \sin \lambda$ en fonction de i', λ', γ et β.



Soient (Fig. 3) XN'N l'écliptique fixe, NA l'orbite lunaire, N'A l'écliptique vrai, X l'équinoxe, pris sur l'écliptique fixe.

On a

$$\overline{\text{XN}'} = \beta, \quad \overline{\text{XN}} = \lambda, \quad \overline{\text{XN}'} + \overline{\text{N}'\text{A}} = \lambda'.$$

Le triangle NAN' donne les relations

$$\cot \overline{\text{AN}} \sin \overline{\text{AN}'} = \cos \overline{\text{AN}'} \cos i' + \sin i' \cot \gamma,$$

$$\cot \overline{\text{AN}'} \sin \overline{\text{AN}} = \cos \overline{\text{AN}} \cos i' - \sin i' \cot i.$$

Dans le calcul dont on s'occupe on peut négliger les se-

condes puissances des petits angles i et i'. Alors AN devient égal à $\lambda'-\lambda$, et, par suite, les deux relations précédentes peuvent s'écrire

$$i'\sin(\lambda'-\lambda) = \gamma\sin(\lambda-\beta),$$
$$i'\sin(\lambda'-\beta) = i\sin(\lambda-\beta).$$

Sous cette forme on en déduit facilement les valeurs cherchées :

$$i\cos\lambda = i'\cos\lambda' + \gamma\cos\beta,$$
$$i\sin\lambda = i'\sin\lambda' + \gamma\sin\beta.$$

D'après cela, les termes en question deviennent

$$\frac{H_1}{1+h_1}\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}(i'\cos\lambda' + \gamma\cos\beta),$$

$$\frac{H_1}{1+h_1}\cos\theta'(i'\sin\lambda' + \gamma\sin\beta).$$

Les angles ψ et θ qui résultent de l'influence de la Lune, quand on a égard au déplacement de l'écliptique, sont donc

$$(11)\quad \psi = \frac{H_1}{1+h_1}\Bigg[n_1\left(1+\frac{i'^2}{2}\right)\cos\theta'.t - \frac{1}{2}\cos\theta'\sin 2v_1$$
$$- i'\frac{n_1}{\alpha}\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sin\lambda' + \frac{i'^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\cos\theta'\sin 2\lambda'$$
$$+ n_1\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sum\frac{k}{g+50'',3}\sin[(g+50'',3)t+\delta]\Bigg],$$

$$(12)\quad \theta = \theta' + \frac{H_1}{1+h_1}\Bigg[\frac{1}{2}\sin\theta'\cos 2v_1 + i'\frac{n_1}{\alpha}\cos\theta'\cos\lambda'$$
$$- \frac{i'^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\sin\theta'\cos 2\lambda' - n_1\cos\theta'\sum\frac{k}{g+50'',3}\cos[(g+50'',3)t+\delta]\Bigg].$$

VIII.

Si l'on réunit les parties obtenues séparément (9) et (11), (10) et (12), on a la représentation complète du mouvement de l'axe terrestre, par les formules

$$\psi = (c + c')t - \frac{b}{\sin\theta'}\sin \text{☊} - \mathrm{F}\cos\theta'\sin 2\odot$$

$$- \mathrm{F}'\cos\theta'\sin 2\text{☾} + \mathrm{G}\cos\theta'\sin 2\text{☊}$$

$$+ \mathrm{K}\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sum\frac{k}{g+50'',3}\sin\left[(g+50'',3)t+\delta\right],$$

$$\theta = \theta' + a\cos\text{☊} + \mathrm{F}\sin\theta'\cos 2\odot$$

$$+ \mathrm{F}'\sin\theta'\cos 2\text{☾} - \mathrm{G}\sin\theta'\cos 2\text{☊}$$

$$- \mathrm{K}\cos\theta'\sum\frac{k}{g+50'',3}\cos\left[(g+50'',3)t+\delta\right],$$

dans lesquelles on a remplacé λ', v et v_1 par les signes ordinaires ☊, $\odot$ et ☾, et l'on a posé

$$c = \frac{3}{2}\,\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\,\frac{n^2\cos\theta'}{\rho(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$c' = \frac{3}{2}\,\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\,\frac{n^2_1\left(1-\frac{i'^2}{2}\right)\cos\theta'}{\rho(1+h_1)(1-e^2_1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$a = \frac{3}{2}\,\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\,\frac{n^2_1\, i'\cos\theta'}{\alpha\rho(1+h_1)(1-e^2_1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$b = \frac{3}{2}\,\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\,\frac{n^2_1\, i'\cos 2\theta'}{\alpha\rho(1+h_1)(1-e^2_1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathrm{F} = \frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\,\frac{n}{\rho(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathrm{F}' = \frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\,\frac{n_1}{\rho(1+h_1)(1-e^2_1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$G = \frac{3}{8}\,\frac{C - A}{C}\,\frac{n_1 i'^2}{\alpha\rho(1 + h_1)(1 - e^2{}_1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = \frac{3}{2}\,\frac{C - A}{C}\left[\frac{n^2}{\rho(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n^2{}_1}{\rho(1 + h_1)(1 - e^2{}_1)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Les sommes

$$\sum \frac{k}{g + 50'',3} \sin [(g + 50'', 3)t + \delta],$$

$$\sum \frac{k}{g + 50'',3} \cos [(g + 50'', 3)t + \delta]$$

peuvent être remplacées par leurs développements suivant les puissances ascendantes du temps, bornés aux premières et secondes puissances; car les constantes, k, g sont de très-petites quantités. On reconnait aisément que, dans le développement de la seconde somme, le coefficient de la première puissance du temps est nécessairement nul. En effet, l'expression de ce coefficient est $-\Sigma k \sin \delta$; or, si l'on pose $t = 0$ dans l'équation

$$\gamma \sin(\beta - \psi) = \Sigma k \sin(gt + \delta),$$

qui, comme nous l'avons vu, sert à définir les constantes k et δ, le premier membre de cette équation devient nul avec γ, et le second membre se réduit à $\Sigma k \sin \delta$.

Si l'on veut réduire les formules en nombres, il faudra s'aider de l'observation du phénomène pour calculer le rapport des moments d'inertie de la Terre $\frac{C - A}{C}$, qui n'est point connu d'ailleurs. On pourra, par exemple, égaler l'expression analytique du coefficient du temps dans la valeur trouvée de ψ à la précession moyenne qui résulte de l'observation; puis on tirera de cette équation une valeur du rapport $\frac{C - A}{C}$ que l'on substituera dans les autres coefficients des formules.

D'après Bessel, si l'on prend l'origine du temps au commencement de l'année 1750, on a

$$\psi = 50'',37572\, t - 0'',0001217945\, t^2 - 16'',78332 \sin ☊ - 1'',33589 \sin 2☉ - 0'',20128 \sin 2☾ + 0'',20209 \sin 2☊,$$

$$\theta = 23^\circ\, 28'\, 18'',0 + 0'',0000984233\, t^2 + 8'',97707 \cos ☊ + 0'',57990 \cos 2☉ + 0'',08738 \cos 2☾ - 0'',08773 \cos 2☊.$$

Si l'on se propose de construire des formules qui représentent le mouvement de l'axe terrestre d'année en année, on conservera au temps une même valeur entière pendant toute la durée d'une année, dans les développements des deux termes qui proviennent du déplacement séculaire de l'écliptique; et, pour plus de rigueur, dans les autres coefficients, on remplacera l'angle θ' par sa valeur initiale augmentée de la valeur du terme séculaire

$$- K \cos\theta' \sum \frac{k}{g + 50'',3} \cos\left[(g + 50'',3)t + \delta\right]$$

pour l'année considérée. De cette manière les formules seront réduites, pour chaque année, à la forme

$$\psi = Dt + D' \sin ☊ + D'' \sin 2☉ + D''' \sin 2☾ + D^{IV} \sin 2☊,$$

$$\theta = E + E' \cos ☊ + E'' \cos 2☉ + E''' \cos 2☾ + E^{IV} \cos 2☊,$$

et les termes séculaires donneront la correction annuelle des coefficients D, D', . . . , E, E', . . . C'est ainsi que sont disposées les formules données dans les recueils astronomiques (voir le *Nautical Almanach*, p. V).

Enfin, il peut être utile de rapporter le mouvement de la Terre à l'écliptique vrai.

Pour cela, nommons Ψ l'angle dont la ligne des équinoxes a rétrogradé sur l'écliptique vrai pendant le temps t, Θ l'angle compris entre l'équateur et l'écliptique vrai; et

considérons l'équateur, l'écliptique fixe et l'écliptique vrai comme trois grands cercles tracés sur une sphère d'un rayon égal à l'unité.

Quand on néglige le carré de l'inclinaison mutuelle des deux écliptiques, la différence $\psi - \Psi$ est égale à la projection sur l'écliptique vrai du petit arc intercepté sur l'équateur par les deux écliptiques; sa valeur est donc

$$\cot \Theta . \gamma \sin \beta \quad \text{ou bien} \quad \cot \theta' . \gamma \sin \beta ,$$

en négligeant le produit $\gamma(\Theta - \theta')$.

Le triangle formé par les trois grands cercles considérés donne

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \gamma - \sin \theta \sin \gamma \cos \beta ,$$

ou bien, en négligeant le carré de γ et le carré de la différence $\Theta - \theta$,

$$\theta - \Theta = - \gamma \cos \beta .$$

On a donc finalement

$$\Psi = \psi - \cot \theta' \Sigma k \sin [(g + 50'', 3)t + \delta] ,$$
$$\Theta = \theta + \Sigma k \cos [(g + 50'', 3) t + \delta] .$$

Quand on prend l'origine du temps au commencement de l'année 1750, les formules numériques, réduites aux termes du premier et du second degré par rapport au temps, sont, d'après Bessel,

$$\Psi = \psi - 0'', 17926\, t + 0'', 0002660294\, t^2 ,$$
$$\Theta = \theta - 0'', 48368\, t - 0'', 00000272295\, t^2 .$$

Une discussion plus complète des formules n'entre point dans l'objet de ce Mémoire, le peu que nous en avons dit doit suffire. Notre but était d'arriver à ces résultats connus, d'une manière plus simple qu'on ne l'avait fait jusqu'ici. Il nous parait atteint, puisque toute la méthode se réduit à des compositions de couples suivant la loi du parallélogramme, et que tout le calcul consiste dans des intégrations immédiates.

En réfléchissant sur la marche que nous avons suivie, on reconnait facilement que le succès est dû, d'une part à ce que tout rayon de l'équateur et, par conséquent, la ligne des équinoxes est un axe principal d'inertie de la Terre relatif au centre; de l'autre à ce que les termes d'un degré superieur par rapport aux moments des forces accélératrices sont tout-à-fait négligeables.

Rome, Collége Romain; 27 Décembre 1855.

Sur l'association de plusieurs condensateurs entre eux pour manifester les faibles doses d'électricité.

(Lettre de M.r P. Volpicelli, à M.r *Pouillet*).

Volta et Cavallo furent les premiers, non pas seulement à imaginer, mais à pratiquer l'association de deux condensateurs entre eux pour accroître la tension électrique (1). Plus tard divers physiciens italiens, entre autres Gerbi (2) et les illustres Belli et Pianciani (3), firent mention de cette méthode, et il y a peu de temps M. Gaugain (4) l'a employée avec assez de succès. En conséquence il sera peut-être utile de démontrer : 1° que la théorie de l'union entre eux de deux condensateurs est corollaire de celle qui en unit un nombre quelconque; 2° que sans doute il est nécessaire que le plateau du premier condensateur soit plus grand que celui du second, afin que l'accroissement de tension s'obtienne, mais que cette condition toute seule n'est pas suffisante; 3° que les nouvelles formules relatives à cette association, considé-

(1) *Collezione delle Opere di Volta.* Firenze, 1816; t. I, p. 269.

(2) *Corso di Fisica.* Pisa, 1823; t. III, p. 239.

(3) *Corso di Fisica.* Milano, 1838; t. III, p. 393. — *Istituzioni fisico-chim.* Roma, 1834, t. III, p. 66.

(4) *Comptes rendus,* 1853; t. XXXVI, p. 1084, et t. XXXVII, p. 84.

rée d'une manière générale, complètent la doctrine du condensateur.

Supposons donc que les condensateurs associés soient ν en nombre, et que les contacts, dans tout le système, entre eux, depuis la source de l'électricité jusqu'au dernier condensateur, se répètent n fois. Représentons par c la charge d'électricité initiale à explorer, et qui pourra être déficiente ou inépuisable. Ensuite pour le condensateur $k^{ième}$, et pour son contact $n^{ième}$ avec le plateau $(k-1)^{ième}$, soient:

m_k le rapport, que j'appelle *électrostatique*, à savoir cette fraction qui dépend en même temps de la distance entre les deux disques, et de la capacité spécifique d'induction du coïbent interposé ;

s_k la superficie du plateau collecteur;

$c_k^{(n)}$ la charge de ce plateau;

$x_{k-1}^{(n)}$ la quantité d' électricité restée libre sur le plateau $(k-1)^{ième}$, après qu'il a communiqué avec le $k^{ième}$,et n'étant pas encore retourné sur sa base ;

$y_k^{(n)}$ la quantité d'électricité dissimulée dans le plateau $k^{ième}$, et relative seulement à sa $n^{ième}$ communication avec le plateau $(k-1)^{ième}$;

$\alpha_k^{(n)}$ l'électricité libre dans le plateau $k^{ième}$ joint à sa base non isolée, et relative seulement au contact $n^{ième}$ avec le plateau $(k-1)^{ième}$;

$\beta_k^{(n-1)}$ et $\gamma_k^{(n-1)}$ les deux électricités, l'une libre, l'autre dissimulée dans le plateau $k^{ième}$, reposé sur sa base communiquante avec le sol, et après avoir exécuté le contant $(n-1)^{ième}$ entre lui et le plateau $(k+1)^{ieme}$.

Maintenant il est facile de voir que les quantités indiquées se lient entre elles moyennant les équations suivantes :

$$(1)\left\{\begin{aligned}
&\overset{(n)}{c}_{k-1} = \overset{(n)}{x}_{k-1} + \overset{(n)}{\alpha}_k + \overset{(n)}{y}_k,\\
&\overset{(n)}{x}_{k-1} : \overset{(n)}{\alpha}_k + \overset{(n-1)}{\beta}_k = s_{k-1} : s_k,\\
&\overset{(n)}{y}_k + \overset{(n-1)}{\gamma}_k + \overset{(n)}{\alpha}_k + \overset{(n-1)}{\beta}_k = \frac{\overset{(n)}{\alpha}_k + \overset{(n-1)}{\beta}_k}{1 - m_k^2},\\
&\overset{(n)}{c}_k = \overset{(n)}{y}_k + \overset{(n-1)}{\gamma}_k + \overset{(n)}{\alpha}_k + \overset{(n-1)}{\beta}_k,\\
&\overset{(n)}{x}_{k-1} = \frac{\overset{(n)}{\beta}_{k-1}}{1 - m_{k-1}^2},\\
&\overset{(n)}{\gamma}_{k-1} = \overset{(n)}{x}_{k-1} - \overset{(n)}{\beta}_{k-1}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'électricité c était déficiente, elle diminuerait à chaque contact avec le premier plateau : pour cela, $z^{(n)}$ répresentant la même électricité après le $n^{ième}$ contact avec le même plateau, nous aurons

$$(2) \qquad z^{(n-1)} - \overset{(n)}{\alpha}_1 - \overset{(n)}{y}_1 = z^{(n)},$$

dans laquelle équation posant

$$n = 1,$$

nous aurons

$$z^{(0)} = c.$$

Supposant dans les équations (1) $n = 1$, on aura

$$\overset{(0)}{\beta}_k = \overset{(0)}{\gamma}_k = 0,$$

et négligeant les deux dernières des équations (1), on obtiendra les équations

$$(3)\left\{\begin{array}{ll} \overset{(1)}{c}_{k-1} = \overset{(1)}{x}_{k-1} + \overset{(1)}{\alpha}_k + \overset{(1)}{y}_k, & \overset{(1)}{x}_{k-1} : \overset{(1)}{\alpha}_k = s_{k-1} : s_k, \\ \overset{(1)}{y}_k + \overset{(1)}{\alpha}_k = \dfrac{\overset{(1)}{\alpha}_k}{1-m_k^2}, & \overset{(1)}{c}_k = \overset{(1)}{y}_k + \overset{(1)}{\alpha}_k; \end{array}\right.$$

desquelles, par l'élimination, on obtiendra les équations

$$(4)\left\{\begin{array}{ll} \overset{(1)}{\alpha}_k = \dfrac{(1-m_k^2)\, s_k\, \overset{(1)}{c}_{k-1}}{(1-m_k^2)\, s_{k-1} + s_k}, & \overset{(1)}{y}_k = \dfrac{m_k^2\, s_k\, \overset{(1)}{c}_{k-1}}{s_k + (1-m_k^2)\, s_{k-1}}, \\ \overset{(1)}{x}_{k-1} = \dfrac{(1-m_k^2)\, s_{k-1}\, \overset{(1)}{c}_{k-1}}{(1-m_k^2)\, s_{k-1} + s_k}, & \overset{(1)}{c}_k = \dfrac{s_k\, \overset{(1)}{c}_{k-1}}{(1-m_k^2)\, s_{k-1} + s_k}, \end{array}\right.$$

relatives à un seul contact pour un condensateur quelconque. C'est-à-dire que la charge dans les plateaux va toujours diminuant du premier au dernier, quelles que soient les quantités s_{k-1}, s_k, m_{k-1}, m_k. Toutefois exprimant avec $\overset{(1)}{t}_k$ la tension du plateau $k^{ième}$, nous aurons

$$\frac{\overset{(1)}{t}_k}{\overset{(1)}{t}_{k-1}} = \frac{1}{1 - m_k^2 + \dfrac{s_k}{s_{k-1}}},$$

et il sera

$$\overset{(1)}{t}_{k-1} < \overset{(1)}{t}_k,$$

si l'on a

$$(5) \qquad 1 - m_k^2 + \frac{s_k}{s_{k-1}} < 1.$$

Mais on ne pourra vérifier la formule (5), sans vérifier aussi la formule

$$(6) \qquad \frac{s_k}{s_{k-1}} < m^k ;$$

donc il sera nécessaire, mais non suffisant, pour avoir l'accroissement de tension, quand on communique la charge d'un plateau à l'autre, que celui-la soit plus grand que celui-ci; à savoir qu'on ait

$$s_{k-1} > s_k ;$$

et des plus on devra vérifier la formule (6); c'est-à-dire que, à la production de l'effet indiqué, doit aussi concourir le rapport électrostatique du condensateur le plus petit.

Le cas le plus commun dans la pratique, celui auquel nous nous arrêterons pour donner quelque développement aux formules précédentes, consiste dans l'association entre eux de deux condensateurs seulement, le premier plus grand que le second; et dans la supposition que la source primitive très-faible de l'électricité, qui doit se manifester par la répétition des contacts entre les disques des deux condensateurs, soit inépuisable. Pourtant, faisant $k=2$ dans les équations (1), nous aurons les suivantes :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \overset{(n)}{c_1} \left[= \overset{(1)}{c_1}\right] = \overset{(n)}{x_1} + \overset{(n)}{y_2} + \overset{(n)}{\alpha_2}, \\ & \overset{(n)}{x_1} : \overset{(1)}{\alpha_2} + \overset{(2)}{\alpha_2} + \ldots + \overset{(n)}{\alpha_2} = s_1 : s_2 , \\ & \overset{(1)}{y_2} + \overset{(2)}{y_2} + \ldots + \overset{(n)}{y_2} + \overset{(1)}{\alpha_2} + \overset{(2)}{\alpha_2} + \ldots + \overset{(n)}{\alpha_2} \\ & \qquad\qquad = \frac{\overset{(1)}{\alpha_2} + \overset{(2)}{\alpha_2} + \ldots + \overset{(n)}{\alpha_2}}{1 - m_2^2} \\ & \overset{(n)}{c_2} = \overset{(1)}{y_2} + \overset{(2)}{y_2} + \ldots + \overset{(n)}{y_2} + \overset{(1)}{\alpha_2} + \overset{(2)}{\alpha_2} + \ldots + \overset{(n)}{\alpha_2} . \end{aligned} \right.$$

Ensuite, faisant $n = 1, 2, 3, \ldots$, nous aurons, par le moyen

de l'élimination, les

$$(8)\left\{\begin{aligned} &\alpha_2^{(n)}=\frac{(1-m_2^2)\,s_2^n\;c_1^{(1)}}{h^n}\,,\quad c_2^{(n)}=\frac{p_n\,s_2\,c_1^{(1)}}{h^n}\,;\\ &y_2^{(n)}=\frac{m_2^2\;s_2^n\;c_1^{(n)}}{h^n}\,,\quad x_1^{(n)}=\frac{(1-m_2^2)\,p_n\,s_1 c_1^{(1)}}{h^n}\,;\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles on a fait, pour abréger,

$$p_n=\left[(1-m_2^2)s_1\right]^{n-1}+n\left[(1-m_2^2)s_1\right]^{n-2}s_2$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.\,2}\left[(1-m_2^2)s_1\right]^{n-3}\;s_2^2+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.\,2}(1-m_2^2)\;s_1\;s_2^{n-2}+ns_2^{n-1}\,,$$

$$h=(1-m_2^2)s_1+s_2.$$

De la troisième des équations (8), il résulte

$$\frac{c_2^{(1)}}{s_2}<\frac{c_2^{(2)}}{s_2}<\frac{c_2^{(3)}}{s_2}<\ldots<\frac{c_2^{(n)}}{s_2}\,;$$

c'est-à-dire les tensions de l'électricité recueillie sur le second plateau, éloigné de sa base, sont croissantes avec l'accroissement du nombre des contacts. Comme d'ailleurs la tension de l'électricité originaire indéficiente s' exprime par $\frac{c}{s}$, alors celle-ci se trouvera accrue dans le second plateau, éloigné de sa base après les n contacts, quand on aura

$$\frac{c_2^{(n)}}{s_2}>\frac{c}{s}\,,\quad\text{ou}\quad p_n\,s_1>(1-m_1^2)\,h^n\,.$$

Dans les mêmes circonstances, il y aura le maximum d'accroissement de tension dans le second plateau, quand sera

$$\frac{\overset{(1)}{c_1}}{s_1} < \frac{\overset{(1)}{c_2}}{s_2},$$

ou quand on aura

$$1 - m_2^2 + \frac{s_2}{s_1} < 1 ;$$

condition qui coïncide avec la formule (5).

Pour faciliter la transmission de l'électricité de la source primitive au premier condensateur, et aussi de celui-ci à tous les autres, jusqu'au dernier du système, il faut employer un conducteur de seconde classe. Ce moyen est indispensable entre la source d'électricité et le premier condensateur, quand elle consiste en un coïbent électrisé. Cela dérive de la faculté qu'ont les conducteurs liquides d'absorber l'électricité des corps isolants électrisés; faculté qui, pour la première fois, a été signalée par l'illustre physicien M. E. Marianini, (*) et à laquelle on doit faire attention pour bien conduire les expériences de ce genre.

(*) Memorie della Società italiana delle Scienze ; T. XXV parte seconda — Nuovo Cimento T. I, p. 50.



RICERCHE SOPRA IL PIANETA GIOVE FATTE COLL' EQUATORIALE DI MERZ ALL'OSSERVATORIO DEL COLLEGIO ROMANO DURANTE L'ANNO 1855

DAL P. A. SECCHI D. C. D. G.

Queste ricerche risguardano tre capi principali. 1° l'aspetto fisico del pianeta, 2.° le sue dimensioni e quelle dei suoi satelliti: 3.° le posizioni di questi relativamente al primario. L'ultimo di questi capi essendo soggetto interessante esclusivamente gli astronomi non credo opportuno di darne minuto conto in questo scritto, e solo ne dirò qualche cosa in generale, trattenendomi più di proposito nei primi due.

L'aspetto del pianeta nel corso della opposizione e per tutto il tempo delle osservazioni, si è presentato in un modo particolare, cioè avente il suo emisfero boreale tutto fosco, e del colore delle fasce più scure; cosa insolita, almeno per quanto consta dalle figure date comunemente. La sera del 1.° luglio a 18^h 45^m di T. sid. ne feci un accurato disegno, e presi anche micrometricamente la posizione delle fasce, donde mi accorsi che esse non erano simmetriche coll' equatore, cioè non aveano eguale latitudine giovicentrica nemmeno quelle che sono le più marcate. La fascia boreale era assai scura, e appena diminuendo alquanto della sua cupa tinta si estendeva fino al polo, nel qual tratto essa non era interrotta che da una piccola zona più chiara che nemmeno attraversava tutto il globo, ma appena una sua metà. Per molte altre sere che osservossi Giove, ad occasione delle misure, continuò simile apparenza finchè talora cominciossi nel segmento oscuro a vedere qualche tratto più lucido. Avendo comunicato la cosa al celebre Sig. Dawes, questi mi disse aver osservato il fenomeno, e per giunta molte strie assai minute nel segmento fosco. Non è

dimostrato però che gli emisferi del pianeta osservati da noi due fossero identici, nè fu fatta speciale attenzione alla sua rotazione. Avendo però ripigliato di nuovo con più attenzione le osservazioni, vidi facilmente queste minute strie coll'ingrandimento di 200 volte nel crepuscolo col grande equatoriale, e al minore strumento del meridiano: ma per vederle di notte scura nell'equatoriale era mestieri adoprare debole ingrandimento e diminuire la luce con un diaframma messo avanti l' obiettivo. Questo pure suole avvenire per le macchie di Venere che con forte luce e potenti ingrandimenti sono meno discernibili. Da questo fatto ancora si comprende perchè siano sfuggite certe minutezze dell' anello di Saturno a diversi astronomi forniti di riflettori di gran luce. Queste fasce secondarie nella calotta del pianeta sono però adesso assai più vive di prima, giacchè sono state vedute anche da diversi al primo appressar dell'occhio allo strumento, e a notte avanzata, onde credo probabile che al principio di luglio passato non esistessero, ma non è meraviglia che usando io sempre fortissimi ingrandimenti non le abbia potute riconoscere. Sul fine esse erano almeno tre molto ben distinte; e di colore cenericcio in fondo rossastro: l'estremo polo del pianeta seguitando ancora ed esser scuro. Tre tinte potevano comodamente distinguersi sul pianeta: un giallo verdino nelle fasce lucide, un giallo rossastro generale sul cui fondo sono le fasce oscure di fosco colore ora plumbeo ed ora violaceo sporco. È notissimo che tali fasce sono variabili, ma é notabile la mancanza di simmetria in questo pianeta come pure in Saturno, ed in Marte; ed è già riconosciuto da un pezzo che anche sulla Terra medesima le zone dei venti alisei le quali secondo diversi autori, produr devono sulla sua superficie veduta da lontano l' aspetto delle fasce di Giove, sono ancor esse non simmetriche; onde abbiamo qui un fatto ormai generale nel sistema planetario che potrebbe forse avere una causa cosmica comune in-

dipendente dai pianeti particolari, e piuttosto in relazione colla distribuzione dei corpi celesti e del calore nello spazio, onde non è inutile farvi qualche attenzione.

Più positive e più interessanti per la scienza sono le ricerche sul secondo punto, cioè intorno allo schiacciamento e al diametro del pianeta. Si possono vedere in Lalande Astr. T. 3. pag. 335, n.° 3345 i risultati diversi degli antichi osservatori. Tra i moderni Maedler e Beer nei *Fragments celestes* pag. 145. Arago ed altri hanno dato valori differenti. Le osservazioni più accreditate e più recenti a mia notizia sono quelle di Struve nelle Memorie della Società Astr. di Londra Tom. III, pag. 301 riportate da I. Herschel nel suo trattato *Outlines of Astr.* n.° 512. Tuttavia pare che questi risultati non abbiano appagato gli astronomi, perchè vedo che a Greenwich nel tomo delle osservazioni del 1851 pag. 52 sono ritornati sullo stesso soggetto, e ottenuto un valore diverso da quello di Struve, assegnando allo schiacciamento $\frac{1}{14,8}$, mentre Struve dà per rapporto degli assi $\frac{100}{107}$ il che porta circa $\frac{1}{16}$.

Le nostre osservazioni sono in tutte 64, e vennero fatte in nove giorni diversi, alcune prima dell'opposizione, altre nel giorno dell'opposizione e nei due immediatamente precedenti e seguenti, e finalmente alcune altre molto tempo dopo l'opposizione, per esaminare precisamente l' influenza della fase. Le misure originali saranno date in altro luogo; qui basterà esporre i risultati, corretti della refrazione, della fase, e ridotti alla distanza media di Giove dal Sole. Essi sono i seguenti:

Diam. Equat. $=38''.3070 \pm 0.0132$. Rapp. dei due assi $\frac{100}{106.66}$.

Diam. polare $= 35.9151 \pm 0.0215$. Schiacciamento $\frac{1}{16.05}$

Questi risultati differiscono poco da quelli di Struve, il quale dà per l'asse equatoriale 38″, 327. L'incertezza che regna ancora sarà difficile farla svanire completamente, e ciò per le difficoltà inerenti alle misure, le quali non sono poche benchè possa parere altrimenti a chi non ha molta pratica. Io ho procurato sempre di usare il massimo ingrandimento di 1000 volte, col quale non solo il pianeta, ma anche i satelliti sono terminatissimi e decisi, ed ho usato di mettere i suoi orli al contatto dei fili, operando sempre per misure doppie, e facendo la debita correzione per la grossezza dei fili stessi. Ma ad onta di tali cautele, sempre rimane qualche indecisione nel punto di contatto, per esser la luce del pianeta molto debole agli orli, e meno assai che al centro. Queste differenze sono state trovate maggiori nelle misure delle diverse sere, che tra i risultati parziali di una sera stessa. La ragione di tal fenomeno parmi poterla ripetere dallo stato dell'atmosfera la quale colle sue oscillazioni dà una diffusione maggiore o minore all'imagine, e infatti le minori divergenze si aveano quando l'aria era tranquilla. Da ciò si vede che è facile che le nostre misure pecchino un pochino in eccesso anzichè in difetto. L' errore probabile di una osservazione isolata è 0″. 119. Ho indicato i limiti di incertezza del risultato, il quale è maggiore per l'asse polare, perchè soggetto maggiormente alla oscillazione atmosferica. L' equatoriale è più facile a misurarsi con molta precisione perchè meno turbato dalla refrazione e in ascensione retta si misura assai bene atteso il moto equabile della macchina mediante l'orologio. È inutile l'avvertire che il cannocchiale ha 9 pollici di apertura libera, usata sempre senza diaframmi, è circa 14 piedi di lunghezza, che il micrometro è un capo d'opera di lavoro; solo diremo che avendo trovato poco ferma la maniera con cui erano stati fissati i fili dall'artista, noi da principio appena ricevuto lo strumento la migliorammo forando la piastra da parte

a parte, e passati per i fori i fili di ragno li fermammo con sodo mastice posteriormente alla piastra stessa col che si ebbe in essi perfetta stabilità, e insieme si evitò ogni pericolo che la cera venendo a toccare i fili dell' altra piastra potesse smoverli in modo alcuno all'atto del suo scorrere su e giù.

Oltre il pianeta ho misurato i diametri dei satelliti, e specialmente del terzo che è il più grande degli altri, e dal confronto del cui diametro facilmente si deduce quello degli altri: ma i numeri che quì do sono solo quelli dati dal micrometro, e combinano assai bene colla stima delle grandezze relative: del terzo satellite ho fatto più misure in 6 sere quelle del quarto solo 2. I risultati ottenuti sono i seguenti:

Satellite	I.°	diam.°	= 0″, 939 ;
»	II.°	»	= 0″, 909 ;
»	III.°	»	= 1″, 562 ;
»	IV.°	»	= 1″, 450 .

I dischi di questi satelliti sono precisi oltre ogni credere, e perfettamente distinguibili dal disco spurio delle stelle: il terzo e il quarto benchè quasi eguali in diametro pure sono assai diversi di luce, cosa già avvertita da W. Herscel, ma difficilmente riconoscibile nei cannocchiali ordinarii a mediocre ingrandimento. Queste diversità di diametro e di luce sono tali che dopo presa qualche pratica sono stato solito riconoscere i satelliti, e distinguerli perfettamente senza l' aiuto di effemeride. Il terzo satellite presenta nel campo l'aspetto di Marte veduto in un piccolo cannocchiale, esso vedesi dichiaratamente macchiato, e le sue macchie variano da un giorno all' altro, ed è questa una preziosa scoperta onde poter riconoscere il tempo della sua rivoluzione attorno al pianeta primario.

Queste macchie sono state sospettate dagli antichi astronomi, ma finora nessuno che io sappia le ha positivamente

osservate. Cassini da prima, poscia Herschel osservando le variazioni di luce che offriva un medesimo satellite mentre compiva il suo giro attorno al primario, osservarono che alcuni di essi mostravano un costante indebolimento di luce, mentre arrivavano in certa posizione della loro orbita, onde ne trassero due conseguenze 1.ª che i satelliti doveano avere delle macchie, e 2.ª che essi doveano rotare attorno al proprio asse nel tempo stesso in cui giravano attorno al primario (Veggasi Herschel, Transaz. filos. 1797 pag. 372). Le macchie, come ho detto, sono state da me e da altri vedute distintissime nel nostro refrattore, ma la seconda parte della conseguenza non sembra appoggiata dal fatto; anzi dirò tutto il contrario; che il moto delle macchie la contradice formalmente. La prima sera che le vidi fu il 22 agosto, in cui il satellite avea due macchie cenericce agli orli, una bianca verso l'alto, e una rossastra al basso: al 26 agosto alle ore $19^h\ 20^m$ T. sid. era nel suo mezzo una macchia cruciforme, che alle ore $21^h\ 10^m$ erasi spostata, ed era andata presso all'orlo tanto che anche la sua figura veduta così di scorcio era appena riconoscibile. Diverse altre sere appresso ho veduto le macchie, e nel 9 settembre ricomparvero le due vedute la prima sera nello stesso posto: e ai 21 novembre potei riguardare la cruciforme in mezzo al disco. L'importanza del soggetto avrebbe richiesto maggiore attenzione, ma non ho potuto seguirle più di proposito specialmente a cagione dell'aria atmosferica: queste macchie è inutile sperare di vederle altro che quando l'aria è tranquillissima onde l'imagine del satellite rimanga ferma nel campo: ogni piccola oscillazione d'aria, benchè non alteri la sua forma, pure col semplice agitare, tutto il satellite le rende indiscernibili: ora è difficile che l'aria duri così tranquilla per molte ore di seguito, e bisogna pigliare i momenti favorevoli a volo. Adesso il pianeta è troppo lontano e in posizione sfavorevole per poterle più osservare.

Dalle osservazioni però fatte finora, e dal confronto delle macchie che possono ragionevolmente credersi identiche, risulta che il tempo della rotazione è notabilmente diverso da quello della rivoluzione. Intorno alla direzione dell'asse nulla posso asserire per mancanza di osservazioni abbastanza continuate: io l'ho veduto più volte sensibilmente ovale, e tale anche senza mia comunicanzione l'ha veduto il P. Rosa, e mi sono assicurato non esser ciò nè difetto del cannocchiale nè della rifrazione atmosferica : tale schiacciamento (che sarebbe forte secondo le prime misure prese) proverebbe pure una assai rapida rotazione.

La difficoltà però di tali osservazioni è estrema, ed è necessario differirla ad altro tempo. Solo dirò che occupato in queste difficili misure, e sempre timoroso dei cattivi effetti della diffrazione nei fili del micrometro filare, ho usato ogni attenzione per studiarli, e credetti che forse un micrometro a doppia imagine potrebbe esser preferibile: sfortunatamente quelli conosciuti finora non sopportano forti ingrandimenti, onde per questi oggetti sono inutili. Ho tentato se potessi avere qualche buon successo col metodo dello spostamento delle imagini che si ottiene mediante una lastra di vetro a facce parallele, introdotta dentro il tubo del cannocchiale in modo, che intercetti una metà solo del cono de'raggi rifratti. Si hanno così due imagini, una diretta e l'altra che passata per la lastra viene spostata più o meno, secondo la sua inclinazione : finchè ho usato mediocri ingrandimenti l'effetto era sorprendente, ma venuto ai fortissimi, apparvero ambedue le imagini allungate perpendicolarmente alla linea di divisione del cono, onde non potevano servire al mio scopo. Queste prove sono state fatte senza i mezzi sufficienti a sì delicate ricerche, onde potrebbe sperarsi che in mano di ottici esperti questo metodo, studiato che fosse, divenisse vantaggioso, e per ciò solo l'ho voluto qui indicare (V. anche *Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris Tom. XLI pag.* 906).

Per ciò che riguarda le posizioni dei satelliti, noterò solo alcune circostanze forse non tutte nuove ma non senza importanza. Tutta la teoria dei loro movimenti riposa sulle osservazioni delle ecclissi; ora essi sono estremamente variabili in durata secondo i cannocchiali, e nel nostro pel 4° l'immersione dura oltre 10 minuti: e per gli altri satelliti a proporzione: i passaggi e le distanze potendosi osservare con più precisione sono preferibili, e di essi ne ho preso diversi secondo che l'hanno permesso altri lavori. La diversa intensità di luce dei satelliti già accennata di sopra può riconoscersi magnificamente quando passano sul disco, perchè il 4° apparisce come una macchia scura quando è nel centro, benchè sia sulla fascia scura, ed è appena discernibile sul pianeta preso agli orli. Il terzo invece l' ho veduto più volte come un punto lucido anche mentre era nel centro e sulla fascia chiara. Il primo è stato nel centro talora appena distinguibile. Ma tutti sono soggetti a variazioni di luce come è noto, e come lo indicano le macchie.

Non sarà inutile aggiungere qualche cosa sul confronto dei satelliti con altri pianeti. Osservando Vesta in opposizione ho veduto il suo diametro minore di quello del primo satellite di Giove, e stimato circa 0″,8: il suo colore era rosso scuro: ma la posizione bassa del pianeta non ha permesso molto esame.

Passando dai satelliti di Giove veduti così nettamente al pianeta Nettuno, esso apparisce sfumato, e come avvolto in nebulosità di un bel colore d'acqua marina, che giustifica la scelta del nome dato a questo pianeta. La nebulosità non può quindi assumersi come imperfezione dello strumento, ma è reale del pianeta stesso.

I diametri dei satelliti dati da Struve sono rispettivamente

$$1^\circ = 1'', 017\ ;\ 2^\circ = 0'', 911\ ;\ 3.^\circ = 1, 488\ ;\ 4.^\circ = 1. 273:$$

cioè alquanto minori dei nostri : ma non é meraviglia in oggetti così difficili trovare qualche diversità.

W. Herschel dava pel 3° satellite il diametro di 1″. 6. Adottando i nostri valori (che pel 3° specialmente credo assai esatti, combinando anche con alcune misure prese dal P. Rosa) sarebbero da aumentarsi i diametri apparenti dei satelliti veduti da Giove, quello del 3° sarebbe di 18.′89, e il diametro suo reale 3545 miglia inglesi (di 1609. 3 metri). La luna nostra é 2158 miglia è il più piccolo dei satelliti di Giove é quasi eguale ad essa. Il diametro di Vesta sarebbe quindi circa 800 miglia : si può da questo argomentare la piccolezza estrema degli altri asteroidi , essendo questo immensamente maggiore. Non deve ommettersi una riflessione importante, ed è che l'irradiazione, e la diffrazione possono qualche poco ingrandire questi minimi dischetti : potrà forse ciò riconoscersi calcolando i diametri dietro il tempo che impiegano i satelliti ad occultarsi dietro il pianeta , perchè allora l'irradiazione forse non ha tanta influenza : alcune osservazioni che già ho fatto a questo proposito saranno discusse in altro luogo. Concluderò col dire, che la sera dell'ultima osservazione di Giove, essendo la sua fase avanzata, si vedevano i due lembi del pianeta precedente e seguente assai diversi tra di loro, essendo molto più preciso quello che era rivolto dalla parte del sole, che l'altro dalla parte della fase, onde può riconoscersi che esiste una diffusione di luce e un crepuscolo sulla superficie di Giove dovuto senza dubbio alla sua atmosfera, tal crepuscolo però non è tale da rendere indispensabile la correzione della fase come sarebbesi potuto sospettare dietro ciò che si è osservato in Venere.

Roma 2 Febraio 1856.



SOPRA LE FORME OMOGENEE A DUE INDETERMINATE.

NOTA

DEL SIG. PROF. ENRICO BETTI.

Sia una Forma omogenea di grado dispari:

$$(1)\qquad F(x, y) = a_0\, x^{2m+1} + \frac{(2m+1)}{1}\, a_1\, x^{2m}\, y + \frac{(2m+1)(2m)}{1.\,2}\, a_2\, x^{2m-1}\, y^2 + \ldots + a_{2m+1}\, y^{2m+1}\,.$$

Ponendo

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} p_0 + p_1 + \ldots + p_m = a_0 \\ p_0\, \alpha_0 + p_1\, \alpha_1 + \ldots + p_m\, \alpha^0{}_m = a_2, \\ p_0\, \alpha^2{}_0 + p_1\, \alpha^2{}_1 + \ldots + p_m\, \alpha^2{}_m = a_2\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_0\, \alpha_0^{2m+1} + p_1 \alpha_1^{2m+1} + \ldots + p_m\, \alpha_m^{2m+1} = a_{2m+1}, \end{array}\right.$$

avremo identicamente

$$(3)\qquad F(x, y) = p_0(x + \alpha_0 y)^{2m+1} + p_1(x + \alpha_1 y)^{2m+1} + \ldots\ldots + p_m\,(x + \alpha_m y)^{2m+1}.$$

Il Sig. *Sylvester* ha trovato che α_0, α_1, $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_m$ sono radici di una equazione di grado $m + 1$, che ha i coefficienti funzioni razionali di quelli della forma (1). Questa equazione può determinarsi nel modo seguente.

Sia la equazione, che ha per radici α_0, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_m$,

$$(4)\qquad \alpha^{m+1} + B_1 \alpha^m + B_2 \alpha^{m-1} + \ldots + B_{m+1} = 0.$$

Moltiplichiamo rispettivamente la 1ª, la 2ª, la 3ª, . . .

la $(m+2)^{esima}$ delle equazioni (2), per B_{m+1}, B_m, B_{m-1}, ..., B_1, 1, e poi sommiamole; moltiplichiamo la 2ª, la 3ª, ... la $(m+3)^{esima}$, per le stesse quantità, e poi sommiamole, e così di seguito fino alle ultime $m+2$; osservando che α_0, $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ sono radici della (4), avremo

$$(5)\left\{\begin{array}{l} B_{m+1}\, a_0 + B_m a_1 + B_{m-1}\, a_2 + \ldots + B_1 a_m + a_{m+1} = 0 \\ B_{m+1}\, a_1 + B_m a_2 + B_{m-1}\, a_3 + \ldots + B_1 a_{m+1} + a_{m+2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{m+1}\, a_m + B_m a_{m+1} + B_{m-1} a_{m+2} + \ldots + B_1 a_{2m} + a_{2m+1} = 0. \end{array}\right.$$

Ricavando da queste i valori di B_{m+1}, B_m, ... B_1 espressi per determinanti, sostituendoli nella (4), e moltiplicando per il denominatore comune, si ottiene facilmente la equazione

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ \alpha & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{m+1} \\ \alpha^2 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{m+1} & a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & \ldots & a_{2m+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Facciamo nella (3) la sostituzione lineare

$$(7)\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt[2m+1]{p_0}}{\alpha_1 - \alpha_2}\Big(\alpha_0(\alpha_1 - \alpha_2)\, x' + \alpha_2(\alpha_0 - \alpha_1) y'\Big), \\ y = \dfrac{\sqrt[2m+1]{p_0}}{\alpha_1 - \alpha_2}\Big((\alpha_2 - \alpha_1) x' + (\alpha_1 - \alpha_0) y'\Big) \end{array}\right.$$

Ponendo

$$(8)\begin{cases} q_0 = p_0^2\left(\dfrac{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_0)}{\alpha_1-\alpha_2}\right)^{2m+1} \\ q_t = p_0\, p_t(\alpha_0-\alpha_t)^{2m+1}, \\ B_t = \dfrac{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_t)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_0-\alpha_t)}, \end{cases}$$

con facilissime ridúzioni si ottiene

$$(9)\quad F(x,y)=F_1(x',y')=\left[q_0\, y'^{2m+1}+\sum_{t=1}^{t=m} q_t\,(x'+B_t y')\right]^{2m+1}.$$

Le funzioni q_t e B_t sono tutte invarianti. Infatti, poniamo

$$\eta_1=\sum_{t=1}^{t=2m+1} t a_{t-1}\frac{d}{da_t},\quad \eta_2=\sum_{t=0}^{t=2m}(2m+1-t)a_{t+1}\frac{d}{da_t},$$

e applichiamo questi simboli di operazioni differenziali alle equazioni (2), avremo

$$(10)\begin{cases} \eta_1 p_0+\eta_1 p_1+\ldots+\eta_1 p_m=0, \\ \alpha_0\eta_1 p_0+\alpha_1\eta_1 p_1+\ldots+\alpha_m\eta_1 p_m \\ \qquad +p_0\eta_1\alpha_0+\ldots+p_m\eta_1\alpha_m=a_0, \\ \alpha_0^2\eta_1 p_0+\alpha_1^2\eta_1 p_1+\ldots+\alpha_m^2\eta_1 p_m \\ \qquad +2p_0\alpha_0\eta_1\alpha_0+\ldots+2p_m\alpha_m\eta_1\alpha_m=2a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_0^{2m+1}\eta_1 p_0+\alpha_1^{2m+1}\eta_1 p_1+\ldots+\alpha_m^{2m+1}\eta_1 p_m \\ \qquad +(2m+1)p_0\alpha_0^{2m}\eta_1 p_0+\ldots+(2m+1)p_m\alpha_m^{2m}\eta_1\alpha_m \\ \qquad =(2m+1)a_{2m}; \end{cases}$$

$$
(11)\left\{\begin{aligned}
&\eta_2 p_0 + \ldots + \eta_2 p_m = (2m+1)a_1,\\
&\alpha_0 \eta_2 p_0 + \ldots + \alpha_m \alpha_2 p_m\\
&\qquad + p_0 \eta_2 \alpha_m + \ldots + p_m \eta_2 \alpha_m = 2ma_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_0^{2m+1} \eta_2 p_0 + \ldots + \alpha_m^{2m+1} \eta_2 p_m\\
&+ (2m+1)p_0 \alpha_0^{2m} \eta_2 \alpha + \ldots (2m+1)p_m \alpha_m^{2m} \eta_2 \alpha_m = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Dalle (10) si ottiene

$$(12) \qquad \eta_1 p_t = 0\,, \quad \eta_2 \alpha_t = 1\,,$$

come è facile a verificarsi, richiamando le formule (2). Dalle (11) si ricava egualmente

$$(13) \qquad \eta_2 p_t = (2m+1)p_t \alpha_t\,, \quad \eta_2 \alpha_t = -\alpha^2_t.$$

Tutte le funzioni I che soddisfano alle due equazioni

$$\eta_1 \mathrm{I} = 0\,, \quad \eta_2 \mathrm{I} = 0.$$

sono invarianti. Applicando i simboli η_1 e η_2 alle funzioni (8), e sostituendo nei risultati i valori dati dalle equazioni (12) e (13), si ha facilmente

$$
\begin{aligned}
\eta_1 q_0 &= 0\,, & \eta_2 q_0 &= 0,\\
\eta_1 q_t &= 0\,, & \eta_2 q_t &= 0,\\
\eta_1 \mathrm{B}_t &= 0\,, & \eta_2 \mathrm{B}_t &= 0.
\end{aligned}
$$

Dunque i coefficienti della forma (9) sono tutti invarianti, che evidentemente, quando li avremo ottenuti espressi per coefficienti della forma (1), non risulteranno razionali, ma funzioni di soli invarianti razionali.

Nel caso di $m = 2$, questa proprietà si trova verificata, in questi Annali, in una Memoria del Sig.Cav. *Fàà di Bruno.*

Firenze, 15 gennajo 1856.

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI CARATTERISTICHE PER UN DISCRIMINANTE.

NOTA I.ª

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

Le equazioni caratteristiche di un discriminante, le quali come si è dimostrato (*) si deducono dalla (1) facendo nella medesima $i = 0, 1, \ldots n - 1$, possono venire trasformate nel modo seguente :

Si osservi che :

$$-k_{i,r} = p_r a_r s_{i-1} + p_{r+1} a_{r+1} s_{i-2} + \ldots$$
$$+ p_{r+i-2} a_{r+i-2} s_1 + (r+i-1) p_{r+i-1} a_{r+i-1}$$

quindi fatto per brevità :

$$\sum_1^n {}_r \frac{p_{r+z}}{p_r} a_{r+z} \frac{d\varphi}{da_r} = N_z$$

$$\sum_1^n {}_r \frac{1}{p_r} k_{i,r} \frac{d\varphi}{da_r} = Q_i$$

si ha :

$$-Q_i = s_{i-1} N_0 + s_{i-2} N_1 + \ldots + s_1 N_{i-2}$$
$$\sum_1^n {}_r (r + i - 1) \frac{p_{r+i-1}}{p_r} a_{r+i-1} \frac{d\varphi}{da_r}.$$

Pongasi in questa equazione $i = 1, 2 \ldots m$; e si scrivano le equazioni risultanti sotto la forma seguente :

(*) Vedi questi Annali fasc. di gennajo 1856, pag. 7.

$$-Q_1 = (m-1)N_0 + \sum_1^n{}_r (r-m+1)a_r \frac{d\varphi}{da_r}$$

$$-Q_2 = s_1 N_0 + (m-2)N_1 + \sum_1^n (r-m+3)\frac{p_{r+1}}{p_r} a_{r+1} \frac{d\varphi}{da_r}$$

. . . .

$$-Q_m = s_{m-1} N_0 + s_{m-2} N_1 + \ldots + s_1 N_{m-2}$$

$$+\sum_1^n{}_r (r+m-1)\frac{p_{r+m-1}}{p_r} a_{r+m-1} \frac{d\varphi}{da_r}.$$

Si moltiplichino ordinatamente queste equazioni per

$$p_{m-1}\,a_{m-1}\,,\; p_{m-2}\,a_{m-2}\,,\; \ldots\,,\; p_0 a_0\,,$$

e si sommino le risultanti; si ottiene la:

$$\sum_1^n{}_r \frac{1}{p_r}\frac{d\varphi}{da_r}\Big((r-m+1)p_{m-1}p_r a_{m-1} a_r + (r-m+3)p_{m-2}p_{r+1}\,a_{m-2}\,a_{r+1}$$

$$+\ldots+(r+m-1)p_0\,p_{r+m-1}\,a_0\,a_{r+m-1}\Big)$$

$$= -(Q_1\,p_{m-1}\,a_{m-1} + Q_2\,p_{m-2}\,a_{m-2} + \ldots + Q_m p_0 a_0).$$

Ma pei valori di Q_1, $Q_2 \ldots Q_m$ dati dall'equazione (1) si dimostra facilmente essere:

$$Q_1 p_{m-1}\,a_{m-1} + Q_2\,p_{m-2}\,a_{m-2} + \ldots + Q_m\,p_0\,a_0 = -\varphi q_{m-1}\,a_{m-1}$$

per il che si avrà:

$$\sum_1^n{}_r \frac{1}{p_r}\frac{d\varphi}{da_r}\Big[(r-m+1)p_{m-1}\,p_r\,a_{m-1}\,a_r + \ldots$$

$$+(r+m-1)p_0\,p_{r+m-1}\,a_0\,a_{r+m-1}\Big] = \varphi q_{m-1}\,a_{m-1}$$

nella quale ponendo $m = 1, 2, \ldots n-1$ si hanno $n-1$ equazioni che si possono sostituire alle analoghe che ottengonsi dalla (1) facendo in questa $i = 1, 2 \ldots n-1$.

INTORNO GLI INVARIANTI DEL TERZO GRADO DELLE FUNZIONI OMOGENEE A DUE INDETERMINATE.

NOTA 2.ª

È noto essere un corollario della legge di reciprocità dell'Hermite che le sole funzioni del grado $4i$ ammettono invarianti del terzo grado. In questa nota espongo una regola semplice per determinare l'invariante del terzo grado della forma $n = 4i$:

$$f = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n.$$

Indico con α_0 l'invariante quadratico della forma :

$$\varphi = a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \dots + a_m y^m$$

supposto $m = 2i$, cioè :

$$\alpha_0 = a_0 a_{2i} - 2i a_1 a_{2i-1} + \dots$$

$$+ (-1)^{i-1} \frac{2i(2i-1)\dots(i+2)}{1.\,2\dots(i-1)} a_{i-1} a_{i+1} + (-1)^i \tfrac{1}{2} \frac{2i(2i-1)\dots(i+1)}{1.\,2\dots i} a_i^2$$

e rappresentando con $\Delta(\varphi)$ l'operazione :

$$n a_1 \frac{d\varphi}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{d\varphi}{da_1} + \dots + a_n \frac{d\varphi}{da_{n-1}}$$

pongo :

$$\alpha_1 = \frac{1}{n} \Delta(\alpha_0), \quad \alpha_2 = \frac{1}{n-1} \Delta(\alpha_1) \dots \alpha_n = \Delta(\alpha_{n-1}).$$

Se con $I_{3,n}$ denotasi l'invariante cubico della funzione f si ha :

$$3 I_{3,n} = a_0 \alpha_n - n a_1 \alpha_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_2 \alpha_{n-2}$$

$$- \dots - n a_{n-1} \alpha_1 + a_n \alpha_0 .$$

Aggiungiamo ad esempio l'invariante cubico della funzione di ottavo grado.

$$I_{3,8} = a_0 a_4 a_8 - 4a_0 a_5 a_7 - 4a_1 a_3 a_8 + 12 a_1 a_4 a_7$$

$$- 8 a_1 a_5 a_6 - 8 a_2 a_3 a_7 - 22 a_2 a_4 a_6 + 36 a_3 a_4 a_5$$

$$+ 3 a_0 a_6^2 + 3 a_2^2 a_8 + 24 a_2 a_5^2 + 24 a_3^2 a_6 + 15 a_6^2.$$

Mediante una legge che ha qualche analogia colla superiore si ottengono, per forme di grado pari, altre funzioni dei coefficienti pure del terzo grado, ma che in generale non sono invarianti, le quali insieme agli invarianti quadratici e cubici entrano a formare i valori dei coefficienti c_1, c_2 . . . della equazione ai quadrati delle differenze. La legge a cui accenniamo è la seguente. Consideriamo la forma f nella quale si supponga n pari, e la φ nella quale si supponga $m = n - s$, (s numero pari $< \frac{n}{2}$). Sia α_0 l'invariante quadratico di φ e si formino le:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2s}\,\Delta(\alpha_0)\,, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2s}\,\Delta(\alpha_1)\,.\;.\;.\;\alpha_{2s} = \Delta(\alpha_{2s-1})\,.$$

La espressione:

$$H = a_0\,\alpha_{2s} - 2sa_1\,\alpha_{2s-1} + \frac{2s(2s-1)}{2}\,a_2\alpha_{2s-2}\,.\;.\;.\;+ a_{2s}\alpha_0$$

è il tipo generale delle funzioni suddette.

Per esempio supponendo $n = 4$, $s = 2$ si ottiene

$$H = 3I_{3,4}\,;$$

e nell'ipotesi di $n = 6$, $s = 2$ si ha:

$$H = 2(a_0\,a_2\,a_6 + 3a_1\,a_2\,a_5 - a_1\,a_3\,a_4 - 3a_0\,a_3\,a_5$$
$$- a^2{}_1\,a_6 - 3a^2{}_2\,a_4 + 2a_2\,a^2{}_3 + 2a_0\,a^2{}_4)$$

la quale espressione di terzo grado entra a comporre, come si è veduto sopra, il valore di c_4 coefficiente del quinto termine dell'equazione ai quadrati delle differenze.

APPENDICE

Questo lavoro era già da qualche tempo stato spedito al Sig. Prof. Tortolini, quando nei fascicoli di Settembre, Ottobre 1855 di questi Annali ho letto le due interessanti note, del Sig. Cav. Fàà di Bruno, sulle funzioni simmetriche delle radici di una equazione. Stante la relazione fra

l'argomento della seconda di esse note, e quello del lavoro che precede credo non inutile l'osservare che il Teorema 1.° del Sig. Faà di Bruno che qui trovasi applicato alla ricerca dei coefficienti dell'equazione ai quadrati delle differenze è una conseguenza dell'equazione

$$\sum_s \frac{d\varphi}{dx_s} = 0\ ,$$

e come tale venne da me presentato nella nota *Sulla teorica degli invarianti* (Giugno 1854). Ora aggiungo che allorquando questa equazione è soddisfatta la funzione φ ha la proprietà che la somma dei suoi coefficienti numerici presi col rispettivo segno è eguale a zero. Il Teorema 2.° è sotto un certo punto di vista incompleto, mentre vi si accenna ad una sola equazione alle derivate parziali, alla quale deve soddisfare il risultante di due equazioni, mentre debbono essere almeno due; come ha enunciato il Sylvester doversi verificare per un invariante qualsivoglia comune a due forme omogenee a due indeterminate. (On a theory of the Syzygetic relations et. Philosophical Transactions, Part. 3. 1853. pag. 516). Io sono però giunto a dimostrare che il risultante di due equazioni dei gradi m, n soddisfa ad $m + n$ equazioni alle derivate parziali lineari di forma affatto differente di quelle del Sylvester, e che io credo essere le caratteristiche per un risultante. Il quale risultato spero poter presto pubblicare.

22 dicembre 1855,

RICERCHE ALGEBRICHE SULLE FORME OMOGENEE A DUE INDETERMINATE.

NOTA

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

§. 1.° Adottando l'ingegnosa notazione del Sig. Cayley, indicheremo con :

$$(a_0, a_1 \ldots a_n)(x, y)^n ;$$

la forma omogenea dell'ennesimo grado a due indeterminate :

$$u = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n.$$

Lemma 1.° Sieno $\varphi(x, y)$; $\psi(x, y)$ due covarianti della forma u; qualunque sieno le costanti h, k, la forma seguente :

$$\varphi[hx - k\psi'(y), hy + k\psi'(x)]$$

sarà un covariante della stessa forma u; cioè i coefficienti dello sviluppo saranno tutti covarianti di u. Questo teorema, facilmente dimostrabile, venne enunciato dal Sig. Hermite nella sua interessante memoria sulla teoria delle funzioni omogenee (*); qui faremo notare una importante proprietà dei covarianti ottenuti quali coefficienti dello sviluppo. Pongasi

$$p = -\psi'(y), \quad q = \psi'(x) ;$$

il coefficiente del termine $r + 1$ dello sviluppo sarà, non tenendo conto di un fattore numerico :

$$\Delta_r = [p\varphi'(x) + q\varphi'(y)]^{(r)}.$$

Si indichi con $\left(\frac{d\Delta_r}{dx}\right)$ la derivata rispetto ad x della fun-

(*) The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. May 1854.

zione Δ_r considerando nella medesima le p, q quali costanti : si ha evidentemente :

$$\Delta_{r+1} = p\left(\frac{d\Delta_r}{dx}\right) + q\left(\frac{d\Delta_r}{dy}\right);$$

ma :

$$\frac{d\Delta_r}{dx} = \left(\frac{d\Delta_r}{dx}\right) + \frac{d\Delta_r}{dp}\,\frac{dp}{dx} + \frac{d\Delta_r}{dq}\,\frac{dq}{dx}$$

quindi posto :

$$p_1 = p\,\frac{dp}{dx} + q\,\frac{dp}{dy}\,, \quad q_1 = p\,\frac{dq}{dx} + q\,\frac{dq}{dy}$$

ed osservando che:

$$\frac{d\Delta_r}{dp} = r\left(\frac{d\Delta_{r-1}}{dx}\right), \quad \frac{d\Delta_r}{dq} = r\left(\frac{d\Delta_{r-1}}{dy}\right)$$

si ottiene :

$$\Delta_{r+1} = p\,\frac{d\Delta_r}{dx} + q\,\frac{d\Delta_r}{dy} - r\left[p_1\left(\frac{d\Delta_{r-1}}{dx}\right) + q_1\left(\frac{d\Delta_{r-1}}{dy}\right)\right].$$

Ripetendo la operazione è evidente che posto :

$$p_2 = p_1\,\frac{dp}{dx} + q_1\,\frac{dp}{dy}\,, \quad q_2 = p_1\,\frac{dq}{dx} + q_1\,\frac{dq}{dy}$$

giungesi alla :

$$\Delta_{r+1} = p\,\frac{d\Delta_r}{dx} + q\,\frac{d\Delta_r}{dy} - r\left(p_1\,\frac{d\Delta_{r-1}}{dx} + q_1\,\frac{d\Delta_{r-1}}{dy}\right)$$
$$+ r\left(p_2\,\frac{d\Delta_{r-1}}{dp} + q_2\,\frac{d\Delta_{r-1}}{dq}\right).$$

Ora supponendo che la funzione $\psi(x, y)$ sia del grado s rispetto alle variabili si hanno le :

$$x\,\frac{dp}{dx} + y\,\frac{dp}{dy} = (s-1)p\,, \quad x\,\frac{dq}{dx} + y\,\frac{dq}{dy} = (s-1)q\;;$$

dalle quali osservando essere $\frac{dp}{dx} = -\frac{dq}{dy}$ si hanno le :

$$Hx = (s-1)\left(p\,\frac{dp}{dx} + q\,\frac{dp}{dy}\right), \quad Hy = (s-1)\left(p\,\frac{dq}{dx} + q\,\frac{dq}{dy}\right)$$

essendo :

$$H = \begin{vmatrix} \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d^2\psi}{dx\,dy} \\ \frac{d^2\psi}{dx\,dy} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix}.$$

Si avranno quindi le :

$$Hx = (s-1)p_1, \quad Hy = (s-1)q_1; \quad Hp = p_2, \quad Hq = q_2$$

ed essendo :

$$p\,\frac{d\Delta_{r-1}}{dp} + q\,\frac{d\Delta_{r-1}}{dq} = (r-1)\Delta_{r-1}$$

$$x\,\frac{d\Delta_{r-1}}{dx} + y\,\frac{d\Delta_{r-1}}{dy} = [(r-1)(s-1)-(i-r+1)]\Delta_{r-1}$$

(supposto essere i il grado del covariante $\varphi(x, y)$) ; si otterrà :

$$(\dagger) \quad \Delta_{r+1} = \psi'(x)\,\frac{d\Delta_r}{dy} - \psi'(y)\,\frac{d\Delta_r}{dx} - \frac{r(i-r+1)}{s-1}\,H.\Delta_{r-1}$$

nella qual formola è contenuta la proprietà che si voleva stabilire.

Lemma 2.° Sia $\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n)$ un invariante di grado r della forma u; e considerando una seconda forma :

$$f = (c_0, c_1 \ldots c_m)(x, y)^m$$

di grado $m > n$; si sostituiscano ordinatamente nell'invariante φ in luogo di $a_0, a_1 \ldots a_n$ le derivate :

$$\frac{d^n f}{dx^n};\ \frac{d^n f}{dx^{n-1}dy} \cdots \frac{d^n f}{dy^n}$$

le quali per brevità indicheremo con α_0, $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$. La espressione:

$$\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)$$

di grado r rispetto ai coefficienti, e di grado $(m-n)r$ rispetto alle variabili sarà un covariante della forma f. Infatti, si indichino con P, Q i simboli di operazione:

$$c_0 \frac{d}{dc_1} + 2c_1 \frac{d}{dc_2} + \ldots + mc_{m-1} \frac{d}{dc_m}$$

$$mc_1 \frac{d}{dc_0} + (m-1)c_2 \frac{d}{dc_1} + \ldots + c_m \frac{d}{dc_{m-1}}$$

si avranno evidentemente le:

$$P(\varphi) = \frac{d\varphi}{d\alpha_0} P(\alpha_0) + \frac{d\varphi}{d\alpha_1} P(\alpha_1) + \ldots + \frac{d\varphi}{d\alpha_n} P(\alpha_n)$$

$$Q(\varphi) = \frac{d\varphi}{d\alpha_0} Q(\alpha_0) + \frac{d\varphi}{d\alpha_1} Q(\alpha_1) + \ldots + \frac{d\varphi}{d\alpha_n} Q(\alpha_n).$$

Ora:

$$P(\alpha_r) = \frac{d^n y f'(x)}{dx^{n-r}\, dy^r}, \quad Q(\alpha_r) = \frac{d^n x f'(y)}{dx^{n-r}\, dy^r}:$$

ossia

$$P(\alpha_r) = r\alpha_{r-1} + y \frac{d\alpha_r}{dx}, \quad Q(\alpha_r) = (n-r)\alpha_{r+1} + x \frac{d\alpha_r}{dy}$$

quindi

$$P(\varphi) = \alpha_0 \frac{d\varphi}{d\alpha_1} + 2\alpha_1 \frac{d\varphi}{d\alpha_2} + \ldots + n\alpha_{n-1} \frac{d\varphi}{d\alpha_n} + y \frac{d\varphi}{dx}$$

$$Q(\varphi) = n\alpha_1 \frac{d\varphi}{d\alpha_0} + (n-1)\alpha_2 \frac{d\varphi}{d\alpha_1} + \ldots + \alpha_n \frac{d\varphi}{d\alpha_{n-1}} + x \frac{d\varphi}{dy}$$

ed essendo la forma φ quella di un invariante si hanno:

$$P(\varphi) - y \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad Q(\varphi) - x \frac{d\varphi}{dy} = 0$$

le quali dimostrano essere $\varphi(\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ un covariante della forma f.

§. 2.° Si indichi con v il determinante

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

nel quale $u_{11} = \frac{d^2u}{dx^2} \ldots$; e con w il determinante analogo formato colle derivate seconde di v. Il determinante v è l'Hessiano di u, ed il w l'Hessiano di v, od il post-Hessiano di u. Il Cayley ed il Sylvester già da tempo, ed il Salmon recentemente (*), generalizzando un teorema di Hesse; hanno dimostrato che il post-Hessiano w é esprìmibile in funzione lineare dell'Hessiano v e della forma u. Se poniamo per brevità

$$a_0 = \frac{d^4u}{dx^4}, \quad \alpha_1 = \frac{d^4u}{dx^3\,dy} \ldots \alpha_4 = \frac{d^4u}{dy^4}$$

ed indichiamo con B, C le espressioni :

$$\alpha_0\,\alpha_4 - 4\alpha_1\,\alpha_3 + 3\alpha^2_2, \quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix}$$

le quali pel Lemma 2.° sono covarianti della forma u; la espressione suddetta pel post-Hessiano w è la seguente :

(2) $$(n-2)(n-3)^2 w = n(n-1)(2n-5)^2 C.u - (n-2)(n-3)(2n-5) B.v.$$

Una proprietà analoga sussiste per un altra funzione dipendente dalla forma u e dal suo Hessiano ed è la :

$$\theta = u_{11}\,v_{22} + u_{22}\,v_{11} - 2u_{12}\,v_{12}$$

per la quale ho trovato sussistere la relazione :

(3) $$(n-2)(n-3)\,\theta = n(n-1)B.u$$

Ciò posto si considerino le equazioni :

(*) Cambridge Journal. Exercices in the Hyperdeterminant Calculus. Feb. 1854.

$$(n-1)^2 u^2_2 = n(n-1)u\, u_{22} - x^2 v$$

$$(n-1)^2 u_1 u_2 = n(n-1)u\, u_{12} + xyv$$

$$(n-1)^2 u^2_1 = n(n-1)u\, u_{11} - y^2 v$$

le quali si deducono dalle notissime dell'Eulero per le funzioni omogenee; e si osservi che moltiplicandole ordinatamente per v_{11}, $-2v_{12}$, v_{22}, e sommando i risultati si ha, osservando al valore di θ:

$$(4) \quad (n-1)^2(n-2)(n-3)\mathrm{V} = n^2(n-1)^2 \mathrm{B}u^2 - 2(n-2)(2n-5)v^2$$

essendosi posto:

$$\mathrm{V} = -\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & v_{11} & v_{12} \\ u_2 & v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}.$$

Analogamente alle equazioni superiori si avranno le tre seguenti:

$$(2n-5)^2 v^2_2 = 2(n-2)(2n-5)v\, v_{22} - x^2 w$$

$$(2n-5)^2 v_1 v_2 = 2(n-2)(2n-5)v\, v_{12} + xy\, w$$

$$(2n-5)^2 v^2_1 = 2(n-2)(2n-5)v\, v_{11} - y^2 w$$

le quali moltiplicate ordinatamente per u_{11}, $-2u_{12}$, u_{22} e sommate avendo riguardo al valore di θ danno:

$$(n-3)(2n-5)^2\, \mathrm{U} = 2n(n-1)(2n-5)\, \mathrm{B}uv - n(n-1)uw$$

e pel valore di w:

$$(5) \quad (n-2)(n-3)^3(2n-5)\, \mathrm{U} = 3n(n-1)(n-2)(n-3)\mathrm{B}uv - n^2(n-1)^2 2(n-5)\mathrm{C}u^2.$$

essendo:

$$\mathrm{U} = -\begin{vmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ v_1 & u_{11} & u_{12} \\ v_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}.$$

Dai due gruppi di equazioni superiori deducesi anche la seguente relazione:

$$(n-1)^2(2n-5)^2\,\delta^2 = 2n(n-1)(n-2)(2n-5)uv\theta$$
$$-\,n^2(n-1)^2\,u^2w - 4(n-2)^2(2n-5)^2v^3$$

nella quale

$$\delta = v_1u_2 - v_2u_1\,;$$

e pei valori di θ, w si ottiene:

(6) $$(n-1)^2(n-2)(n-3)^2(2n-5)\delta^2$$
$$= 3n(n-1)^2(n-2)(n-3)\,\mathrm{B}uv$$
$$-\,n^3(n-1)^3(2n-5)\mathrm{C}u^3 - 4(n-2)^2(2n-5)v^3.$$

Aggiungiamo anche le seguenti due relazioni facilmente dimostrabili:

$$(2n-5)\mathrm{V}_1 = nuw\,,\quad (n-1)\mathrm{U}_1 = 2(n-2)v^2$$

essendo:

$$\mathrm{V}_1 = -\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_{11} & v_{12} \\ v_2 & v_{21} & v_{22} \end{vmatrix},\quad \mathrm{U}_1 = -\begin{vmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}.$$

Si osservi che le U, V, δ pel Lemma 1.° sono covarianti della forma u e che supponendo nel Lemma medesimo

$$\varphi(x,y) = v\,,\quad \psi(x,y) = u$$

la formola (1) nella quale facciasi $r = 1$ dà:

$$\mathrm{V} = u_1\frac{d\delta}{dy} - u_2\frac{d\delta}{dx} - \frac{2(n-2)}{n-1}v^2$$

e quindi ponendo

$$\delta_1 = u_2\frac{d\delta}{dx} - u_1\frac{d\delta}{dy}$$

si ha pel valore di V:

(7) $$(n-1)^2(n-2)(n-3)\delta_1$$
$$= 4(n-2)(n-3)v^2 - n^2(n-1)^2\mathrm{B}u^2.$$

Si osservi che le formole trovate sussistono qualunque sia il valore di n, fuorchè per $n=2$ e per $n=3$. In quest' ultimo caso indicando con D il discriminante della funzione stessa si ottengono le :

$$w = 36D\,, \quad \theta = 0\,,$$

e quindi :

$$2V = -v^2\,, \quad U = -6^3Du\,, \quad \delta^2 = -9.36Du^2 - v^3.$$

22 Dicembre 1855.

SULLE FUNZIONI ISOBARICHE.

NOTA

DEL CAV. F. FAA' DI BRUNO

Nell'analisi finita, infinitesimale o simbolica egli arriva sovente d'incontrare delle funzioni razionali ed intere di certe date quantità $(a_0\, a_1\, a_2 \ldots)$ tali che in ciascuno dei loro termini gl'indici di queste soddisfino all'equazione

$$(1) \qquad 0.\alpha_0 + 1.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + 3.\alpha_3 + \ldots = n,$$

essendo $(\alpha_0\,, \; \alpha_1\,, \; \alpha_2\,, \; \alpha\,)$ gli esponenti rispettivi di $(\alpha_0\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots)$ ed m un numero dato intiero. L' impiego frequente di dette funzioni, che oggigiorno si fa forse più evidente, mentre per lo innanzi era quasi come latente nell'analisi in causa di una inopportuna disignazione delle quantità, merita per agevolare il corso delle idee e delle ricerche, loro si applichi un nome speciale. Il Sig. Cayley in una sua lettera me ne propone uno che mi pare assai conveniente, quello cioè di *funzioni isobariche*. Chiamando perciò *peso* la somma dei prodotti degl' indici delle quantità componenti un termine per i relativi esponenti, si dirà che una funzione razionale ed intera è *isobarica* allorquan-

do il peso sarà costante per tutti i termini. Lo stato di una funzione dotata di tale proprietà potrassi eziandio appellare *equipollenza.* Chiàmiamo ancora *fattoriale* il prodotto 1. 2. 3 . . . l, l il *modulo della fattoriale*, e *funzione isoborica fattoriale* quella funzione isobarica in cui siasi diviso ciascun termine per le fattoriali aventi per modulo gli esponenti che vi figurano.

Quanto siegue sarà sufficiente, io spero, a giustificare la utilità di tali denominazioni, e sopra tutto a far vedere come d'ora innanzi i calcoli tutti abbiano a guadagnare in chiarezza, semplicità e speditezza per la considerazione di sì fatte funzioni, e come alcuni fra essi considerati finora quasi di una impossibilità pratica si effettuino invece colla più grande facilità.

Notiamo con P_n una funzione isobarica di peso n e di grado l, e con $P^l_{(n)}$ una funzione isobarica fattoriale di grado l, avremo perciò sotto le condizioni

(2) $$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots = n$$

(3) $$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots \leqq l$$

(4) $$P^l_n = \Sigma C a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3} \ldots\ldots$$

(5) $$P^l_{(n)} = \Sigma C \frac{a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3} \ldots}{\pi(\lambda_0)\,\pi(\lambda_1)\,\pi(\lambda_2)\,\pi(\lambda_3)\ldots\ldots},$$

ove C è un coefficiente qualunque differente per ciascun termine in generale, e $\pi(\lambda_i) = 1.\ 2.\ 3 \ldots i$.

Se la funzione isobarica fosse omogenea la condizione (3) diventerebbe

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots = l.$$

Ciò posto si hanno i seguenti teoremi

1.° Sia $\varphi(y)$ una funzione qualunque della variabile y legata ad un altra x per la equazione

$$y = \psi(x)$$

si avrà:

$$\frac{D^n{}_x\varphi}{\pi(n)} = D_y\psi . P^1_{(n)} + D^2_y\,\varphi .\, P^2_{(n)} + D^3_y\,\varphi .\, P^3_{(n)} + \ldots + D^n_y\,\varphi .\, P^n_{(n)}$$

ove $P^i{}_{(n)}$ indica in generale una funzione isobarica fattoriale delle quantità simboliche

$$\frac{\psi'}{1}, \frac{\psi''}{1.2}, \frac{\psi'''}{1.2.3}, \ldots \frac{\psi^{(n)}}{1.\,2.\,3\ldots n}.$$

Questa non è altro che la formola da noi già data in questi Annali (Novembre 1855), messa sotto altra forma.

2.° Supponiamo

$$\psi(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots .$$

si otterrà immediatamente lo sviluppo di x mediante la formula

$$\varphi(a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots)$$

$$= \Sigma x^n\left(\varphi' a_0 P^1_{(n)} + \varphi'' a_0 P^2_{(n)} + \varphi''' a_0 P^3_{(n)} + \ldots + \varphi^{(n)} a_0 P^n_{(n)}\right)$$

Così a modo di esempio si avrà quasi istantaneamente pel coefficiente di x^5:

$$\varphi' a_0 a_5 + \varphi'' a_0 (a_1\,a_4 + a_2\,a_3) + \varphi''' a_0\left(\frac{a_1{}^2 a_3}{2} + \frac{a^2{}_2 a_1}{2}\right)$$

$$+ \varphi^{IV}\,a_0\,\frac{a^3{}_1 a_2}{1.2.3} + \frac{\varphi^{V}\,a_0 . a^5{}_1}{1.2.3.4.5}.$$

Qualora si avesse $\varphi(a_0) = a^m{}_0$ si otterrebbe per lo sviluppo del polinomio potenziale

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^m \text{ (*)}$$

(*) Si ha pure questo risultato singolare circa lo sviluppo della funzione

$$X = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n)^m$$

cioè che

$$a_n^{-m} X = \Sigma x^n \frac{(-m)^p}{\pi i\,\pi j\,\pi k}\left(\frac{s_{-1}}{1}\right)^i \left(\frac{s_{-2}}{2}\right)^j \left(\frac{s_{-3}}{3}\right)^h \ldots$$

$s_{-1}\ s_{-2}\ s_{-3} \ldots$ essendo le somme delle potenze -1, -2, -3, ... delle radici.

l'espressione

$$\Sigma x^n \left(m a_0^{m-1} \, P^1_{(n)} + m(m-1) a_0^{m-2} \, P^2_{(n)} \right.$$

$$\left. + m(m-1)(m-2) a_0^{m-3} \, P^3_{(n)} + \ldots \right).$$

Così per $m=4$, $n=5$ si ricaverà il coefficiente

$$5a^4_0 \, a_6 + 4.5a^3_0(a_1 a_4 + a_2 a_3) + 3.4.5a^2_0\left(\frac{a^2_1 a_0}{2} + \frac{a^2_2 a_1}{2}\right)$$

$$+ 2.3.4.5a_0 \frac{a^3_1 a_2}{1.2.3} + 1.2.3.4.5 \frac{a^5_1}{1.2.3.4.5}.$$

3. Sia

$$\varphi(y) = \frac{1}{y}$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots ;$$

si avrà :

$$\frac{1}{y} = \Sigma x^n \left[-\frac{1}{a^2_0} P^1_n + \frac{(2)}{a^3_0} P^2_n - \frac{(3)}{a^4_0} P^3_n + \ldots \pm \frac{(n)}{a_0^{n+1}} P^n_n \right].$$

Se ora posto

$$z = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \ldots .$$

si volesse sviluppare $\frac{z}{y}$ secondo le potenze ascendenti di x si troverebbe evidentemente pel coefficiente di x^n :

$$\Sigma b_i \left[-\frac{1}{a^2_0} P^1_{n-i} + \frac{(2)}{a^3_0} P^2_{n-i} - \frac{(3)}{a^4_0} P^3_{n-i} + \ldots \pm \frac{(n-i)}{a_0^{n-i+1}} P^{n-i}_{n-i} \right].$$

Consideriamo come applicazione l'espressione

$$\delta_r = \frac{u^r{}_1 \, \varphi u_1}{f'u} + \frac{u^r{}_2 \, \varphi u_2}{f'u_2} + \ldots + \frac{u^r{}_n \, \varphi u_n}{f'u_n}$$

essendo

$$fu = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \ldots + a_n$$
$$\varphi u = b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + b_2 u^{n-2} + \ldots + b_n$$

e proponiamoci di trovarne il valore.

Osserviamo pertanto che si ha:

$$\begin{aligned}\delta_r = b_0\left[\frac{u_1^{n+r}}{f'u_1} + \frac{u_2^{n+r}}{f'u_2} + \ldots\right] \\ + b_1\left[\frac{u_1^{n+r-1}}{f'u_1} + \frac{u_2^{n+r-1}}{f'u_2} + \ldots\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + b_{r-1}\left[\frac{u_1^{n+1}}{f'u_1} + \frac{u_2^{n+1}}{f'u_2} + \ldots\right].\end{aligned}$$

Ora è noto che in generale

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{u_i^{n+l}}{f'u_2}$$

è il coefficiente di $\frac{1}{u^{n+l+1}}$ nello sviluppo di $\frac{1}{fu}$ secondo le potenze ascendenti di $\frac{1}{u}$. Facciamo dunque $\frac{1}{u} = x$, e la formola precedente agevolmente ci darà:

$$\delta_r = \Sigma\, b_i\left[-\frac{1}{a^2_0} P^1_{r-i+1} + \frac{(2)}{a^3_0} P^2_{r-i+1} - \frac{(3)}{a^4_0} P^3_{r-i+1} + \ldots\right]$$

Sia $r = 1$, si avrà:

$$\delta_1 = b_0\left[-\frac{1}{a^2_0} P^1_2 + \frac{(2)}{a^4_0} P_2^2\right] + b_1\left[-\frac{1}{a_0} P'_1\right] + b_2 \frac{1}{a_0}$$

ossia

$$\delta_1 = \frac{1}{a^3_0}\left[b_0(a^2_1 - a_2) - b_1\, a_1\, a^2_0 + b_2\, a^2_0\right].$$

Si trova così molto più facilmente il risultato già dato dal Sig. Brioschi a tal proposito nel giornale di *Crelle.* Osserverò qui intanto che la forma di determinante, sotto cui egli pone δ_r non è se non un caso. particolare di questo teorema da me trovato ultimamente :

Il coefficiente di x^n nello sviluppo di $\frac{z}{y}$ secondo le pôtenze ascendenti di x è eguale a :

$$(-1)^n \frac{1}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_0 \\ b_n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}$$

Tale formola permetterà di esprimere esplicitamente in funzione di $(b_0\, b_1 \ldots a_0\, a_1 \ldots)$ i residui di *Sturm* relativi a $\frac{\varphi u}{f u}$ come farò vedere un altra volta.

4. Quanto abbiamo brevemente indicato sullo sviluppo delle funzioni a una sola variabile basterebbe a dimostrare la superiorità dell'impiego delle funzioni isobariche a qualunque altro metodo conosciuto finora per risolvere una tale questione. Per lo sviluppo poi delle funzioni a più variabili si può dire che l'analisi tace. Ma mediante le funzioni isobariche esso si farà in un modo di una sorprendente facilità, ed ignoto per lo passato.

Sia adunque per esempio

$$X = \varphi(a_0 + a'x + a_{\prime}y + a''x^2 + a'_{\prime}xy + a_{\prime\prime}y^2$$
$$+ a'''x^3 + a''_{\prime}x^2y + a'_{\prime\prime}xy^2 + a_{\prime\prime\prime}y^3 + a^{IV}y^4 + \ldots)$$

il coefficiente di $x^p\ y^q$ *nello sviluppo sarà :*

$$\varphi'a_0 P^1_{(p,q)} + \varphi''a_0 P^2_{(p,q)} + \varphi'''a_0 P^3_{(p,q)} + \ldots + \varphi^{(p+q)} a_0 P^{p+q}_{(p,q)},$$

$P^i_{(p,q)}$ *indicando una funzione isobarica fattoriale di peso* p *rapporto agli indici superiori, e di peso* q *per rapporto agli indici inferiori dei coefficienti di* x, y *nella* φ.

La dimostrazione ne è altrettanto semplice. Mi contenterò di accennare che la doppia equipollenza si deduce cambiando x, y in hx e ky, che la funzione coefficiente di $\varphi^i(a_0)$ oltre di essere isobarica sia fattoriale, si dimostra prendendo

$$\varphi = y^m = (\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)^m$$

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3, \ldots$ indicando i polinomj in xy di grado 1, 2, 3... In generale ciò varrà per qualunque numero di variabili. Si avrà così :

$$\varphi'\Delta . P^1_{(p,q,r)} + \varphi''\Delta . P^2_{(p,q,r)} + \varphi'''\Delta . P^3_{(p,q,r)} + \ldots + \varphi^{(p+q+r)} P^{p+q+r}_{(r,q,r}$$

pel coefficiente di $x^p\ y^q\ z^r$ nello sviluppo di

$$\varphi[\Delta + \Delta'x + \Delta_{\prime}y + {}_{\prime}\Delta z + \Delta''x^2 + \Delta_{\prime\prime}y^2 + {}_{\prime\prime}\Delta z^2$$
$$+ \Delta'_{\prime}xy + {}_{\prime}\Delta'xz + {}_{\prime}\Delta_{\prime}yz + \Delta'''x^3 + \Delta'''x^3$$
$$+ \Delta_{\prime\prime\prime}y^3 + {}_{\prime\prime\prime}\Delta z^3 + \ldots]$$

e

$$\varphi'\square . P^1_{(p,q,r,s)} + \varphi''\square . P^2_{(p,q,r,s)} + \varphi'''\square . P^3_{(p,q,r,s)} + \ldots$$
$$+ \varphi^{(p+q+r+s)} P^{p+q+r+s}_{(p,q,r,s)}$$

pel coefficiente di $x^p\ y^q\ z^r\ v^s$ nello sviluppo di

$$\varphi(\square + \square'x + \square_{\prime}y + {}'\square v + \square''x^2 + \square_{\prime\prime}y^2$$
$$+ {}_{\prime\prime}\square z^2 + {}''\square v^2 + \ldots)$$

ove in generale $P^i_{pqrs\ldots}$ indica una funzione isobarica di peso $p, q, r, s \ldots$ per rapporto agli indici corrispondenti alle variabili $x, y, z, v \ldots$ e di grado i per rapporto all' insieme delle quantità che vi entrano.

ESEMPII

per le funzioni a due variabili.

Il coefficiente di x^2y sarà

$$= \varphi' a_0 . a''_{,} + \varphi'' a_0 . (a' a'_{,} + a_{,} a'') + \varphi''' a_0 . \frac{a'^2 a_1}{2} ;$$

il coefficiente di xy^3 :

$$= \varphi' a_0 \, a'_{,,,} + \varphi'' a_0 (a' a'_{,,,} + a'_{,,} \, a_{,} + a'_{,} a_{,,})$$

$$+ \varphi''' a_0 \left(a'_{,} \, a_{,} \, a_{,,} + a'_{,} \frac{a^2_{,}}{2} \right) + \varphi^{IV} a_0 . \frac{a'_{,} \, a^3_{,}}{1.\,2.\,3}$$

il coefficiente di $x^2 y^4$:

$$= \varphi' \, a_0 . \, a''_{IV} + \varphi'' a_0 \left(\frac{a'^2_{,,}}{2} + a'' a_{IV} + a'_{,,,} \, a'_{,} \right)$$

$$+ \varphi''' a_0 \left(\frac{a'^2 \, a_{IV}}{2} + \frac{a^2_{,,} \, a''}{2} + a_{,} \, a_{,,,} \, a'' + a'_{,} \, a_{,} \, a'_{,,} + a'_{,,} \, a'_{,} \, a_{,} \right)$$

$$+ \varphi^{IV} \, a_0 \left(\frac{a^3_{,} \, a''_{,}}{1.\,2.\,3} + \frac{a'^2 a^2_{,,}}{4} + \frac{a'^2 a^2_{,}}{4} + \frac{a^2_{,} \, a' \, a'_{,,}}{2} \right)$$

$$+ \varphi^V a_0 \left(\frac{a^4_{,} \, a''}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{a^2_{,} \, a_{,,} \, a'^2}{4} + \frac{a^3_{,} \, a' \, a'_{,}}{1.\,2.\,3} \right)$$

$$+ \varphi^{IV} \, a_0 \frac{a'^2 \, a^4_{,}}{(2)\,(4)} .$$

Per le funzioni a tre variabili.

Il coefficiente di x^2yz sarà :

$$= \varphi'\Delta.\, {}_{,}\Delta_{,}'' + \varphi''\Delta.({}_{,}\Delta'_{,}\,\Delta' + {}_{,}\Delta''_{,} + \Delta'_{,}\,{}_{,}\Delta' + \Delta''\,{}_{,}\Delta_{,})$$

$$+ \varphi'''\Delta.\left(\frac{\Delta'^{2}\,{}_{,}\Delta_{,}}{2} + \Delta''\Delta_{,}\,{}_{,}\Delta + \Delta'\Delta'_{,}\,{}_{,}\Delta + \Delta'\,{}_{,}\Delta'\,\Delta_{,}\right)$$

$$+ \varphi^{IV}\Delta.\frac{\Delta'^{2}\,\Delta_{I}\,{}_{I}\Delta}{2}.$$

5. L'equipollenza da me trovata nella nota di Ottobre 1855 della risultante dall'eliminazione fra due equazioni omogenee a due variabili si estende alla risultante dell'eliminazione fra un numero qualunque di equazioni omogenee a pari numero di variabili. Inoltre chiamando R questa risultante, $a^{(i)}_{p,q,r,s\ldots o}$ il coefficiente del termine in $x^p y^q z^r \ldots v^s$ nella i^a equazione (l'indice o corrisponde ad una qualunque delle variabili), e $\delta a_{p,q,r,s}\ldots$ ciò che diventa il coefficiente del termine simile dopo di aver cambiato una variabile in se stessa più una quantità qualunque nelle diverse equazioni, si avranno tante equazioni della forma

$$\Sigma\Sigma\delta.\, a^{(i)}_{p,q,r,s}\,\frac{dR}{da_{p,q,r,s}} = 0$$

giacchè sono le variabili meno una; uno dei Σ estendendosi ai coefficienti di una medesima equazione, e l'altro a quelli corrispondenti delle altre equazioni.

Trovo pure, cosa forse ancor nuova, che in generale essendo m il grado delle equazioni, ed n il numero delle variabili, il grado ed il peso della risultante, sono rispettivamente espressi da nm^{n-1} e $(n-1)m^n$. La dimostrazione di tale importante teorema, che mi è sfuggita per qualche tempo, non e difficile. Nulla manca perciò per calcolare con questo metodo la risultante suddetta.

6. Le funzioni simmetriche delle radici, epperciò gl'invarianti, come l'ha dimostrato pel primo il Sig. Brioschi, sono funzioni isobariche dei coefficienti. Tale proprietà si rileva facilmente dalla mia nota (Settembre 1855). Darò

qui in ultimo, come applicazione gl'invarianti primitivi di una funzione di 5.° grado, che ho calcolati ma senza molta pena.

7. Si calcolerà facilmente una funzione isobarica seguendo questa regola che propongo, e potrebbesi chiamare la regola dell'*anteretro*. Si prenda la lettera pertanto l'indice eguale al peso, per esempio, a_n. Si tolga da una parte una unità all'indice, e si aggiunga dall'altra a_1, e così di seguito; e partendo del resto da un termine qualunque si faccia avanzare l'indice di una quantità, retrocedendo quello di un altra di quanto ha guadagnato il peso. Vogliasi per esempio calcolare la forma dell'invariante di una equazione cubica

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3$$

Il peso in questo caso deve essere 6, ed il grado 4. Si parta da $a_0\ a_1\ a_2\ a_3$ per esempio, e si retroceda a_3, a_2, a_1 cambiandoli in $a_2\ a_1\ a_0$; bisognerà d' altra parte aumentare qualcheduno degli altri indici.

Si avrà così successivamente

$a_0\ a_1\ a_2\ a_3$	
$a^2_1\ a^2_2$	(a_3 retrocede, a_0 avanza)
$a_0\ a^3_2$	(a_3 retrocede, a_1 avanza)
$a^3_1\ a_3$	(a_2 retrocede, a_0 avanza)
$a^2_0\ a^2_3$	(a_1 retrocede, a_2 avanza)

Vogliasi ancora calcolare la forma delle funzioni indicate alla fine del paragrafo 2. Si otterrà mano a mano, partendo da $a_0^4\ a_5$

$a_0\ a_0\ a_0\ a_0\ a_5$	
$a_0\ a_0\ a_0\ a_1\ a_4$	a_5 retrocede, a_0 avanza
$a_0\ a_0\ a_0\ a_2\ a_3$	a_4 id. , a_1 id.
$a_0\ a_0\ a_1\ a_2\ a_2$	a_3 id. , a_0 id.
$a_0\ a_0\ a_1\ a_1\ a_3$	a_2 id. , a_0 id.
$a_0\ a_1\ a_1\ a_1\ a_2$	a_3 id. , a_0 id.
$a_1\ a_1\ a_1\ a_1\ a_1$	a_2 id. , a_0 id.

Questa decomposizione che abbiamo qui indicata per farci comprendere si farà agevolmente col pensiero, e quasi nel tempo richiesto dalla scrittura si svilupperà un coefficiente qualunque.

Invarianti primitivi della funzione di 5° grado.

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f$$



Invariante di 4° grado.

$$I_4 = a^2f^2 + 9b^2e^2 - 32c^2d^2 - 10abef + 4aedf - 76bcde$$
$$- 48(bd^3 + c^3e) - 16(b^2df + ace^2) + 12(bc^2f + aed^2).$$



Invariante di 8° grado.

$$I_8 = + 27b^4e^4 + 8c^4d^4 - 42b^5d^3f - 21a^2c^2d^2f^2 + a^2b^2e^2f^2$$
$$+ a^3cdf^3 + 74bc^3d^3e - 81b^3ede^3 + 25b^2c^2d^2e^2$$
$$+ 133ab^2cde^2f - 220abc^2d^2ef + 11a^2bcdef^2$$
$$- 2(b^5f^3 + a^3e^5) + 18(b^2d^6 + c^6e^2)$$
$$- 38(ac^4e^3 + b^3d^4f) - 27(ac^5f^2 + a^2d^5f) + 24(a^2c^2e^4$$
$$+ b^4d^2f^2) + 38(b^2c^3e^3 + b^3d^3e^2) + 18(b^2c^4f^2 + a^2d^4e^2)$$
$$- 24(bc^2d^5 + c^5d^2e)$$
$$+ 5(ab^3cf^3 + a^3de^3f) + 12(ac^3d^2e^3 + b^2c^2d^3f) + 6(ac^2ed^4$$
$$+ bc^4d^2f) - 54(ab^2ce^4 + b^4de^2f) - 9(abd^5e + bc^5ef)$$
$$+ 3(ab^2d^2e^3 + b^3c^2e^3f) - 42(a^2ce^3d^2 + b^3c^2df^2)$$
$$+ 12(a^2c^3ef^2 + a^2bd^3f^2) + 5(a^2bde^4 + b^4cef^2)$$
$$-(a^2b^2df^3 + a^3ce^2f^2) - 57(bc^4de^2 + b^2cd^4e)$$
$$- 30(ab^2c^2ef^2 + a^2bd^2e^2f) - 18(abc^3e^2f + ab^2d^3ef)$$
$$+ 93(abcd^4f + ac^4def) - 42(abcd^3e^2 + b^2c^3def)$$
$$- 78(abc^3df^2 + a^2cd^3ef) + 116(abc^2de^3 + b^3cd^2ef)$$
$$- 5(ab^3def^2 + a^2bce^3f) - 34(ab^2cd^2f^2 + a^2c^2de^2f)$$

Invarianti di 12.ᵒ grado.

$$I_{12} =$$

$$+ 27b^6e^6 + 16c^6d^6 + 27(c^{10}f^2 + a^2d^{10}) + 4(c^9e^3 + b^3d^9)$$
$$- 4(a^3c^5f^4 + a^4d^5f^3) + 40(ac^3d^8 + c^8d^3f) + 83(b^2c^7d^8$$
$$+ c^8d^2e^2) - 14(a^3d^6e^3 + b^3c^6f^3) + 16(ac^7e^4 + b^4d^7f)$$
$$+ 4(b^2c^6e^4 + b^4d^6e^2) + 32(b^4c^3e^5 + b^5d^3e^4) - 72(bc^4d^7 + c^7d^4e)$$
$$+ 16(a^3c^3e^6 + b^6d^3f^3) + 3(a^4d^2e^6 + b^6c^2f^4) - 24(a^2c^5e^5$$
$$+ b^5d^5f^2) - 3(a^4ce^7 + b^7df^4) + 3(a^3b^2e^7 + b^7e^2f^3) - 18ab^5e^5f$$
$$+ 106ac^5d^5f - a^2b^4c^4f^2 + 63a^2c^4d^4f^2 - 22a^3c^3d^3f^3$$
$$- a^4c^2d^2f^4 + 330bc^5d^5e - 234b^5cde^5 + 139b^2c^4d^4e^2$$
$$- 866b^3c^3d^3e^3 + 713b^4c^2d^2e^4 - 90(abcd^9 + c^9def)$$
$$- 10(ab^4c^3f^4 + a^4def) - 222(ac^4d^6e + bc^6d^4f)$$
$$- 220(ac^6d^2e^3 + b^3c^2d^6f)$$
$$+ 102(ab^4d^2e^5 + b^5c^2e^4f) - 36(ab^4ce^6 + b^6de^4f) - 4(ab^2c^4e^5$$
$$+ b^5d^4e^2f) + 138(ab^3d^5e^3 + b^3c^5e^3f) + 48(ab^2d^8e + bc^8e^2f)$$
$$+ 292(ac^5d^4e^2 + b^2c^4d^5f) - 180(a^2cd^8e + bc^8df^2)$$
$$+ 428(a^2c^2d^6e^2 + b^2c^6d^2f^2) + 78(a^2bd^7e^2 + b^2c^7ef^2)$$
$$+ 194(a^2c^4d^2e^4 + b^4c^2d^4f^2) - 440(a^2c^3d^4e^3 + b^3e^4d^3f^2)$$
$$+ 78(a^2b^2d^7f + ac^7d^2f^2) + 39(a^2b^2d^4e^4 + b^4e^4e^2f^2)$$
$$- 72(a^2bd^8f + ac^8ef^2) - 4(a^2b^2e^2e^6 + b^6d^2e^2f^2)$$
$$+ 62(a^2c^6e^2f^2 + a^2b^2d^6f^2) - 30(a^2b^3dc^6 + b^6ce^3f^2)$$
$$- 16(a^2c^4e^3f^2 + a^2b^3d^4f^3) - 22(a^3bd^3e^5 + b^5c^3ef^3)$$
$$- 60(a^3c^2d^2e^5 + b^5c^2d^2f^3) + 56(a^3cd^4e^4 + b^3c^4df^4)$$
$$- 6(a^3cd^6f^2 + a^2c^6df^3) + 18(a^3d^7ef + abc^7f^3)$$
$$- (a^4c^2e^4f^2 + a^2b^4d^2f^4) - 10(a^4d^3e^4f + ab^4c^3f^4)$$
$$+ 11(a^4d^4e^2f^2 + a^2b^2c^4f^4) - 56(bc^7de^3 + b^3cd^7e)$$
$$- 354(bc^6d^3e^2 + b^2c^3d^6e) + 550(b^2c^5d^2e^3 + b^3c^2d^5e^2)$$
$$- 246(b^3c^4de^4 + b^4cd^4e^3)$$

$+ 308(ab^3c^2de^5 + b^5cd^2e^3f) - 804(abc^3d^5e^2 + b^2e^5d^3ef)$
$+ 1246(ab^2c^2d^4e^3 + b^3c^4d^2e^2f) + 234(ab^2cd^7f + ac^7de^2f)$
$- 516(ab^2cd^6e^2 + b^2c^6de^2f) + 136(abc^5de^4 + b^4cd^5ef)$
$- 204(ab^3c^3e^4f + ab^4d^3e^3f) - 128(abc^6e^3f + ab^3d^6ef)$
$- 342(ac^6d^3ef + abe^3d^6f) + 206(abc^4d^3e^3 + b^3c^3d^4ef)$
$- 652(ab^2c^3d^2e^4 + b^4c^2d^3e^2f) - 590(ab^3cd^3e^4 + b^4c^3de^3f)$
$+ 112(ab^4d^4ef^2 + a^2bc^4e^4f) - 164(ab^3d^5cf^2 + a^2dc^5e^3f)$
$+ 394(ab^2c^3d^4f^2 + a^2c^4d^3e^2f) + 14(ab^5cdf^4 + a^4cde^5f)$
$+ 506(abc^2d^7e - bc^7d^2ef) + 30(ab^3c^4ef^3 + a^3bd^4e^3f)$
$- 70(ab^2c^3df^3 + a^3cd^5e^2f) - 14(ab^5ce^2f^3 + a^3b^2de^5f)$
$+ 16(ab^4cd^3f^3 + a^3c^3de^4f) - 324(abc^5d^3f^2 + a^2c^3d^5ef)$
$- 90(ab^2c^5e^2f^2 + a^2b^2c^5e^2f) - 32(ab^5d^2ef^3 + a^3bc^2e^5f)$
$+ 46(ab^3c^3d^2f^3 + a^3c^2d^3e^3f) + 50(ab^5de^3f^2 + a^2b^3ce^5f)$
$+ 60(ab^4c^2e^3f^2 + a^2b^3d^2e^4f) - 54(a^2bc^3de^5 + b^5c^3de^3f)$
$- 108(a^2c^5d^2ef^2 + a^2bc^2d^5f) - 14(a^2b^2c^3e^3f^2 + a^2b^3d^3e^2f^2)$
$- 294(a^2bcd^3e^3 + b^3c^5def^2) - 28(a^2bc^5ef^3 + a^3bd^5ef^2)$
$- 16(a^2b^3c^2df^4 + a^4cd^2e^3f^2)$

$+ 54(a^2bc^4d^2f^3 + a^3c^2d^4cf^2) + 298(a^2bc^2d^3e^4 + b^4c^3d^2ef^2)$
$- 50(a^2b^2c^2d^3f^3 + a^3c^3d^2e^2f^2) + 2(a^2b^4de^2f^3 + a^3b^2ce^4f^2)$
$- 14(a^2b^3c^2e^2f^3 + a^3b^2d^2e^3f^2) + 6(a^2b^2cd^2e^5 + b^5e^2de^2f^2)$
$+ 36(a^3c^4def^3 + a^3bcd^4f^3) + 6(a^3bc^3df^4 + a^4cd^3ef^3)$
$- 6(a^3bc^3e^2f^3 + a^3b^2d^3ef^3) - 24(a^3bcde^6 + b^6cdef^3)$
$+ 42ab^3c^2d^2e^3f + 38ab^4cde^4f + 1078abc^4d^4ef$
$- 714ab^2c^3d^3e^2f + 82a^2bc^3d^3ef^2 + 168a^2b^2c^2d^2e^2f^2$
$- 132a^2b^3cde^3f^2 - 4a^3b^2cde^2f^3 - 50a^3bc^2d^2ef^3$
$- 168(ab^2c^2d^5ef + abc^5d^2e^2f) + 674(ab^2c^4de^3f + ab^3cd^4e^2f)$
$+ 242(abc^6def^2 + a^2bcd^6ef) - 48(ab^4d^2ce^2f^2 + a^2b^2e^2de^4f)$
$- 170(ab^3d^3c^2ef^2 + a^2bc^3d^2e^3f) - 48(ab^2cd^4ef^2 + a^2b^2c^4e^2f^2)$

$$- 42(ab^2c^4d^2ef^2 + a^2bc^2d^4e^2f) - 30(a^2b^4c^2def^3 + a^2b^2cd^3e^3f)$$
$$- 2(ab^3c^3de^2f^2 + a^2b^2cd^3e^3f) - 48(ab^4cd^2e^2f^2 + a^2b^2c^2de^4f)$$
$$+ 82(a^2b^3cd^2ef^3 + a^3bc^2de^3f^2) - 30(a^2b^2c^3def^3 + a^3bcd^3e^2f^2)$$
$$- 170(a^2bc^3d^2e^3f + ab^3c^2d^3f^3).$$

Parigi 2 Febbrajo 1856.

SUL TEOREMA FONDAMENTALE
DELL'INDUZIONE ELETTROSTATICA
NOTA

DEL PROF. A. NOBILE

Tutti sanno che, messo in presenza di un corpo elettrizzato un conduttore isolato, vi si svolgono due principii elettrici; e niuno ignora che i fisici suppongono liberi tali principii, dotati cioè di apparente tensione, e distribuiti in maniera in un conduttore cilindrico, che dal suo estremo prossimo alla sorgente elettrica ad un punto medio più o meno distante dagli estremi, con ordine decrescente, si trovi unicamente elettricità contraria a quella del corpo inducente; e che dall'estremo remoto a quel punto medesimo, del pari con ordine decrescente, vi si manifesti solo elettricità del medesimo nome.

Ma quelle due elettricità, che si svolgon mercè l' induzione, si trovan esso veramente libere e dotate di tensione apparente nel senso che i fisici danno a queste parole , e distribuite nel sopradetto modo ? Questa fu la domanda che a sè stesso fece il Melloni alquanti giorni innanzi che da immatura morte fosse rapito all'onore dell'Italia ; e la risposta che gli porsero le sue ingegnose esperienze fu contraria alle idee comuni ; imperocchè le esperienze mostrarongli: esser dissimulata l'elettricità contraria all'inducente, libera l' omonoma ; andar quella decrescente dall' estremo prossimo al remoto; e questa del pari decrescente dal remoto al prossimo.

Sì fatta quistione è sopra modo importante, perchè si lega al fatto primitivo della elettricità, ed al teorema fondamentale dell'elettrostatica. E però ben meritarono della scienza coloro che tolsero ad esaminarla unicamente con lo scopo di coglierne il vero, o almeno sceverarlo dall'errore.

Quando il Melloni palesò i suoi dubbi intorno all'antica dottrina testè riferita, e mise innanzi quel nuovo principio, io non esitai punto ad abbracciarlo, trattovi meno dalla forza degli esperimenti all'uopo invocati, che da un bell'accordo che scorgeva tra il medesimo principio ed alcuni fatti irrepugnabili, di cui la fisica è da gran tempo in possesso; e più ancora dalla possibilità di poterlo ricavare come conseguenza di questi fatti medesimi. Laonde, nel tessere l'elogio istorico del Melloni poco dipoi la sua morte, lasciando a questo grande la gloria di essere stato il primo a porre in campo dubbi, *e richiamare l' attenzione de' fisici su di un punto importantissimo della scienza elettrica*, dissi che quelle sue deduzioni *rientravano nelle dottrine bene intese della elettricità che i fisici chiamano dissimulata*; e, per non riuscir soverchio, accennai allora, in una brevissima nota, le pruove che mi parvero all'uopo sufficienti.

Questa nuova dottrina, nondimeno, è stata impugnata da alcuni fisici, e da altri accolta ed ampliata; e quella mia nota, ed un'altra molto autorevole, perchè del celebre De la Rive, vennero pubblicate in varie raccolte scientifiche, e ristampate anche separatamente come di sostegno alla medesima dottrina. La qual cosa, indipendentemente dall'importanza dell' argomento, mi caccia quasi nell' obbligo di svolgere alquanto il concetto che allora, per angustia di luogo, troppo brevemente espressi; di rammentare alcune nozioni che condurrebbero a conseguenze inesatte, quando

non fossero intese nel vero senso; e di aggiungere novelli esperimenti, che per avventura sembranmi tanto ostili all'antica dottrina, quanto favorevoli alla nuova.

Nella disamina delle esperienze conosciute e de' fatti dai quali io credo debba emergere la verità che si cerca, io non anderò punto oltre i fatti medesimi e le leggi da cui son governati; e farò astrazione da ogni ipotesi intorno alla natura dell'elettricità, ed anche dalla luminosa teorica elettrostatica dell'illustre Faraday, da cui forse potrebbe dedursi non pure il principio che prendo a dimostrare, ma eziandio i fatti e le esperienze allegate dal Melloni. E se talvolta userò espressioni che sembrino accennare a talune ipotesi, si abbian come mere abbreviazioni di linguaggio, che rammentino non altro che fatti.

Se due dischi metallici isolati, carichi entrambi di eguale quantità di elettricità contrarie, si mettano convenientemente in presenza l'uno dell'altro, e si lascino divisi da uno strato di aria, o da qualunque altra materia isolante; si sa che questa materia oppone un ostacolo alla riunione o ricomposizione de' due principii, ma non si oppone punto all'azione per influenza, ch'essi esercitano l'uno su l'altro; anzi è tale questa influenza, quest'azione attrattiva scambievole delle due elettricità, da vincere la resistenza del corpo isolante, quando questa non è forte abbastanza; e rendere insensibile, quando ciò non avviene, la loro azione su i corpi circostanti, celandola quasi del tutto: non altrimenti che fanno due elementi chimici, che, congiunti insieme, o tendenti a congiungersi per forte affinità, non risentono le azioni minori che esercitano altri elementi su ciascuno di essi separatamente. Quella forma adunque che assumono i due principii elettrici, qualunque essa sia, quando esercitano tra loro

un'azione attrattiva che non vale a vincere la resistenza ad essi opposta da un coibente interposto, e che li rende impotenti ad esercitare manifesta azione su i circostanti corpi, é appunto ciò che i fisici addimandano elettricità dissimulata, o nello stato latente e senza tensione apparente: denominazione che esprime un fatto, senza più. Ho voluto ricordare queste nozioni, perchè la più parte de' dubbi mossi contro il nuovo principio, parmi che abbiano avuto origine dall'essere state esse intese altrimenti, non ponendosi forse ben mente a' surriferiti caratteri della elettricità detta dissimulata; talchè non mancano valorosi fisici, i quali trovano anche nel fatto primitivo dell'elettricità, ed in tanti altri simiglianti casi d'influenza una ragione per negare la scambievole dissimulazione di una parte delle contrarie eletricità sembrando loro incompatibile dissimulazione ed attrazione, mentre tutto dimostra che la prima è una conseguenza della seconda; e che quanto più questa aumenta tanto più quella diviene estesa.

Non sembra che sia essenzial differenza tra elettricità libera e dissimulata, essendo entrambe casi d' induzione di cui non sappiamo renderci ragione, e l'ultima di esse quasi conseguenza di forze contrarie che tendono scambievolmente a distruggersi. E forse verrà tempo in cui, maggiormente addentrati i fisici ne'misteri di questo proteiforme agente, sarà per disparire questa distinzione. Ma, poichè è loro mancata la guida di una teorica del tutto esente da obbiezioni, han distinta la elettricità in libera e dissimulata, o in elettricità di tensione e latente senza tensione apparente; e perchè, d'altra parte, han riconosciuta quest' ultima forma ne'due dischi, nel quadro magico, nella boccia di Leida, e nel condensatore, ne'quali figurano sempre due con-

duttori tra uno strato coibente, era mestieri esaminare se le due elettricità che si svolgono in un conduttore isolato, in presenza di un corpo elettrizzato, vi si trovino ambedue sotto l'una o l'altra forma, o ciascuna in uno stato diverso.

Un conduttore isolato ed un altro elettrizzato, divisi da uno strato di aria, costituiscono un sistema non dissimile da cotesti apparati; e però nella citata nota, dopo aver ricordato tal simiglianza, conchiusi con le seguenti parole: « Il vero meccanismo della natura nelle azioni e reazioni » elettriche è involto in dense tenebre; ma mi parrebbe » molto strano se si ammettesse, nel caso della boccia, del » quadro magico, del condensatore ec., una reciproca forza » dissimulante, che mantiene nello stato latente, e senza » tensione, due porzioni di contraria elettricità, e si escludesse del tutto nel caso testè allegato. La conseguenza » logica che emerge dai fatti e dalle dottrine adottate da » tutti i fisici intorno all' elettricità dissimulata, indipendentemente da nuovi esperimenti, è appunto, se una forte » illusione non m'inganna: che il corpo inducente svolga » ed attiri sul corpo indotto tanta elettricità contraria, » quanta può mantenerne nello stato latente e senza tensione. »

Ma, indipendentemente da cotesta simiglianza di apparati, noi possiamo trarre altre convincenti pruove del diverso stato delle due elettricità, se poniamo ben mente ai soli fenomeni conosciuti che ne porge il caso in quistione. Ed invero, nel conduttore indotto isolato si svolgono i due principii elettrici, e ciò è un fatto su cui non cade dubbio alcuno; ed è del pari incontestabile che, mettendo il medesimo conduttore in comunicazione col suolo senza sottrarlo dall'influenza, toccandolo in un punto qualunque, vi

rimane solo la elettricità contraria, e vi rimane dissimulata. Ora, questi due fatti, che apparentemente sembrano diversi, sono senza dubbio due simili casi di induzione: imperocchè il mettere in comunicazione col suolo un conduttore che trovavasi isolato ed indotto, non è altro che aggiungere a questo la massa della terra formandone un solo enorme conduttore, che differisce dal primo semplicemente per la forma e la mole. Il che porge un forte criterio per supporre in ambi i casi l'elettricità contraria nel medesimo stato, cioè dissimulata. Nè il pian di prova adoperato alla maniera di Coulomb, che ci dimostra l'elettricità sensibile quando si è distaccato dalla parte prossima del conduttore indotto, deve farci supporre altrimenti; chè, anche quando, coll'istesso metodo, ci facciamo ad esplorare il medesimo conduttore indotto, dopo che fu messo in comunicazione col suolo, troviamo elettricità libera; e nondimeno nella propria sede eravi del tutto dissimulata. Perchè dunque non supporre nell'altro caso simile la medesima trasformazione? Perchè non attribuire, come opinava il Melloni, al predominante principio contrario dissimulato divenuto libero, ciò che ci mostra il piano di prova? Le esperienze del Coulomb rimarrebbero sempre quali documenti preziosi nella scienza: se non che una delle elettricità che egli misurava dovrebbe aversi come dissimulata.

Torna favorevole a farne supporre cotale stato diverso de'due principii elettrici che si sviluppano in un conduttore isolato indotto la facilità grande che ha il principio omologo a venir dissipato per via dell'aria. Ed invero, se i due corpi, inducente ed indotto, subito dopo l'influenza, si allontanino fra loro, il principio contrario, non più allora legato o dissimulato nell'ultimo di tali corpi, divenen-

do libero come l'omologo , ha luogo la ricomposizione , e svanisce in esso ogni maniera di segni elettrici. Ma , se , al contrario, quei due corpi si lascino lungo tempo in presenza l'uno dell'altro prima di dar opera a quell' allontanamento, segni evidenti di elettricità contraria nell'indotto dimostrano che durante l' influenza una maggior copia di elettricità omologa è andata dispersa, e che però vi si trovava in uno stato diverso dall'altra.

D'altra parte, il rimanere in quel conduttore la sola elettricità contraria, quando ha avuto luogo, senza più, la comunicazione col suolo, è eziandio pruova evidente che essa vi si trovava sotto condizioni diverse, e che una forza, qualunque ella sia, ve la riteneva; e, poichè in virtù di cotal forza vi rimane dissimulata, è evidente che in questo stato trovavasi anche prima di quella comunicazione. Quando una delle armature di una boccia di Leida carica è stata isolata, e si tocchi l'altra che contiene elettricità dissimulata e alquanto di libera; quest'ultima è quella che vi sparisce, e l'altra vi rimane appunto perchè dissimulata.

Aggiungono forza a tali ragionamenti i noti fatti seguenti. Rimanendo il conduttore sotto l'influenza, dopo che per poco si è comunicato col suolo; se più o meno vi si allontani dall'induttore, una maggiore o minore elettricità dissimulata divien libera. Se, al contrario, si ritorni ad avvicinare, il fenomeno inverso accade; e, se più si avvicini , l'elettricità omologa libera è quella che appare. Tutto pruova adunque che l'elettricità dell'induttore, oltre le fasi che subisce per la reazione del principio contrario eccitato nell'indotto , eserciti su di quest' ultimo una forza attrattiva dissimulante.

In fine, se i fisici chiaman dissimulata quella elettricità

che rinviensi sul conduttore indotto, dopo che per poco ha comunicato col suolo; se essi ammettono le alternative di una maggiore o minore elettricità dissimulata, secondo che più o meno avvicinansi i conduttori; è mestieri ammettere la dissimulazione nel caso di che è parola. Nè vale il dire che il corpo indotto isolato contiene allora anche l'elettricità omologa; conciossiachè, oltre che in uno de'casi dianzi allegati si hanno del pari i due principii in uno stato diverso, ripugna a tutti i fatti noti il supporre due contrarie elettricità libere nel medesimo conduttore, senza che abbiano a neutralizzarsi; e, d'altra parte, torna più razionale e d'accordo co'fatti noti, il supporre che non abbia luogo questa unione appunto perchè una di quelle è sotto l'azione di una forza; e che i due principii elettrici esercitano tra loro una scambievole forza attrattiva che ha per conseguenza la dissimulazione, la quale è quasi principio di quella neutralizzazione che diviene estesa e perfetta al solo contatto.

Le belle esperienze del chiarissimo P. Volpicelli, (1) tra le altre cose, benchè più indirettamente, conducono alla medesima conseguenza: imperocchè esse dimostrano simiglianti fasi di conversione di elettricità libera in dissimulata e viceversa, non con le varie posizioni dell'indotto rispetto all'induttore, ma col semplice avvicinamento o allontanamento di un terzo corpo da quest'ultimo.

Le antiche esperienze dirette a farne conoscere lo stato e la distribuzione de'due princìpii elettrici su di un conduttore isolato ed indotto, riescono dubbie, siccome avvertì il Melloni, per le perturbazioni che derivan dall'inducente, determinate poscia dal Volpicelli, (2) e perchè non si esamina

(1) Comptes Rendns, T. XLI, p. 553.
(2) Idem, T. XL, p. 246.

lo stato elettrico dell'indotto nella propria sede durante l'induzione. D'altra parte, le nuove esperienze, a cagione delle lamine comunicanti col suolo di cui quel fisico faceva uso per riparare gli elettroscopii, hanno destato nelle menti di alcuni qualche dubbiezza più o meno fondata.

Giovandomi di alcuni vecchi apparati elettrici che l'amicizia dell'onorevole P. Bandiera volle mettere a mia disposizione, presi a fare alcune esperienze, di cui ora riferirò le seguenti.

Con intendimento di esaminare lo stato elettrico de' diversi punti del conduttore indotto, evitando appendici ed ogni altra maniera di corpi sporgenti, e non avvicinando ad esso altri conduttori, ho disposto lungo il dorso di un cilindro metallico terminato da segmenti di sfere, i cui diametri erano maggiori del diametro del cilindro, un certo numero di piccoli aggregati di polvere di licopodio ben secca, curando che questi aggregati non avessero ad oltrepassare il punto più alto del prossimo capo : messo precedentemente questo conduttore in presenza di un altro più sottile comunicante con quello della macchina elettrica, e a una tale distanza da evitare che abbia ad aver luogo la diretta attrazione della polvere, e però il fenomeno complesso che si vuole evitare e che potrebbe condurre ad errori. Animata la macchina, l'induzione tosto manifestasi col sollevamento o getti continui di polvere, che si vede sollevare nella parte lontana dall'induttore, mentre nulla vedesi nella vicina ; anzi riesce talvolta bello il vedere elevarsi quella finissima polvere e dar vista di piccole fontane, che van con ordine decrescente dallo estremo remoto dall'induttore al prossimo dove si osserva una perfetta apparente immobilità.

Io non mi farò a trarre conseguenze da questa esperienza: imperocchè chiaramente ella ne mostra, da una parte, l'effetto della elettricità libera; e dall'altra segni evidenti di uno stato elettrico diverso fin presso all'estremo prossimo, dove col piano di prova trovasi sufficiente elettricià contraria.

Il seguente esperimento, quantunque richieda non poca diligenza e delicatezza nel praticarlo, nondimeno più direttamente parmi che conduca al divisato scopo. Per rimuovere o scemare le illusioni che provengono dalle trasformazioni che subisce nel suo stato elettrico il noto piano di prova poscia che viene allontanato dall'influenza dell'inducente, e distaccato da alcuni luoghi della superficie dell'indotto di cui formava parte; e quindi per isfuggire o menomare le ingannevoli apparenze; invece di far uso del piano di prova metallico, ho adoperato dischetti di materie molto isolanti, perchè tali materie non patiscono le medesime influenze de'conduttori; non scemano, anzi aumentano l'induzione, avendo esse un potere induttivo maggiore dell'aria; e, di più, sono tali, da prendere e ritenere l'elettricità libera solo in quei punti che furono a contatto col corpo elettrizzato.

Con una composizione a un di presso simile a quella che adoprasi per formare il coibente dell'elettroforo, ho formato de'dischetti di piccolissima spessezza (circa mezzo millimetro) e molto piccoli di diametro. Ho parimente formato de'simili dischetti di zolfo ed altri di ceralacca, e li ho situati per mezzo di poca di quest'ultima sostanza alla estremità di altrettante sottilissime bacchette di vetro.

Facendo toccare per qualche tempo, senza strofinio, un dischetto con una parte qualunque del corpo indotto, ho sempre ottenuto, segni di elettricità omologa.

Per accertarmi in maniera molto sensibile della natura della elettricità in tal modo comunicata al disco, la prima idea che mi surse nella mente si fu quella di conseguire le figure di Leichtemberg, spargendovi le solite polveri di minio e zolfo; ma, per la poca elettricità e la mancanza di più opportuni apparati, non essendomi fin ora tornato soddisfacente un tal mezzo, feci ricorso ad un sensibilissimo elettroscopio semplice precedentemente carico di nota elettricità, e ad un elettroscopio a pile a secco, e ne conseguii i surriferiti risultamenti.

INTORNO AD UN TEOREMA DI ABEL

NOTA

DEL SIG. LUIGI CREMONA.

Il teorema del quale questa breve nota contiene una dimostrazione, venne enunciato per la prima volta da Abel, in una lettera diretta a Legendre (*), e in seguito dimostrato dal Signor Broch (**).

Lemma 1.° Siano a_0, a_1, . . . a_{n-1} n quantità qualsivogliano; α una radice primitiva dell'equazione $x^n - 1 = 0$; e

$$\theta_r = a_0 + a_1\alpha_r + a_2\alpha^2_r \dots + a_{n-1}\,\alpha_r^{n-1}$$

supposto

(1) $$\alpha_r = \alpha^r .$$

Si moltiplichino fra loro i due determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

(*) Crelle, Journal für die Mathematik, Band 6.
(**) Crelle, Journal für die Mathematik, Band. 20.

Eseguendo la moltiplicazione per linee, ed avendo riguardo alla (1), le colonne del determinante prodotto riescono ordinatamente divisibili per θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_n$; e si ha

$$D\Delta = \theta_1\theta_2 \ldots \theta_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2}^2 & \ldots & \alpha_{n-2}^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

ma il determinante che entra nel secondo membro di questa equazione è evidentemente eguale a $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta$; dunque

$$\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$$

Il teorema espresso in questa formola fu enunciato per la prima volta dal Signor Spottiswoode (*); la dimostrazione è del prof. Brioschi, mio valente maestro.

Lemma 2.° Si considerino le a_0, a_1, .. a_{n-1} come funzioni di una stessa variabile, derivando rispetto ad esse il determinante D, si ha

$$D' = D_1 + D_2 \ldots D_n$$

ove D_r è il determinante che si ottiene dal determinante D, sostituendo agli elementi della resima colonna le loro derivate. Nel determinante D_r dispongansi le linee $(n-r+2)$esima, $(n-r+3)$esima, ... $n$esima, prima, seconda, ..., $(n-r+1)$esima in modo che riescano ordinatamente prima, seconda, .. $(r-1)$esima, $r$esima, $(r+1)$esima, ... $n$esima; indi si dispongano le colonne $r$esima, $(r+1)$esima, .. $n$esima, prima, seconda, ... $(r-1)$esima per modo che diven-

(*) Crelle. Journal für die Mathematik, Band 51.

gano prima, seconda, . . $(n-r+1)$esima, $(n-r+2)$esima, $(n-r+3)$esima, ... $n$esima; si avrà

$$D_r = D_1$$

dunque

$$D' = nD_1 = nD_2 = \ldots = nD_n\,,$$

Lemma 3.° Sia

$$H = \begin{vmatrix} m_0 & q_0 & q_1 d & \ldots & q_{n-2} d^{n-2} \\ m_1 d & q_1 d & q_2 d^2 & \ldots & q_{n-1} d^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n-1} d^{n-1} & q_{n-1} d^{n-1} & q_0 & \ldots & q_{n-3} d^{n-3} \end{vmatrix}$$

Si può dimostrare che l' espressione $\frac{H}{d}$ è razionale rispetto a d^n. Infatti, dopo aver divisa la seconda linea del determinante H per d, se si moltiplicano le colonne seconda, terza, . . . ultima per d^n, d^{n-1}, . . . d^2; e poi si dividono le linee terza, quarta . . . . ultima per d^2, d^3, . . . d^{n-1}, si ottiene

$$\frac{H}{d} = \frac{1}{d^n} \begin{vmatrix} m_0 & q_0 d^n & q_1 d^n & \ldots & q_{n-2} d^n \\ m_1 & q_1 d^n & q_2 d^n & \ldots & q_{n-1} d^{n-1} \\ m_2 & q_2 d^n & q_3 d^n & \ldots & q_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n-1} & q_{n-1} d^n & q_0 & \ldots & q_{n-3} \end{vmatrix}$$

Teorema di Abel. Sia $F(x) = 0$ l' equazione risultante dalla eliminazione della y fra le due equazioni algebriche

$$y^n - R(x) = 0\,, \quad q_0 + q_1 y + q_2 y^2 \ldots + q_{n-1} y^{n-1} = 0$$

ove $R(x)$ sia una funzione razionale ed intera di x; q_0, q_1, . . q_{n-1} n funzioni razionali ed intere della stessa x, nelle quali però i coefficienti delle potenze della variabile siano quantità indeterminate, supposte funzioni di un' arbitraria t. Siano α_1, α_2, . . α_n le n radici dell'equazione

$x^n - 1 = 0$, e facciasi $d = \sqrt[n]{R(x)}$. Pel lemma 1.° si ha

$$F(x) = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 d & q_2 d^2 & \cdot\,\cdot & q_{n-1} d^{n-1} \\ q_1 d & q_2 d^2 & q_3 d^3 & \cdot\,\cdot & q_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n-1} d^{n-1} & q_0 & q_1 d & \cdot\,\cdot & q_{n-2} d^{n-2} \end{vmatrix}$$

Moltiplicando le linee seconda, terza, ... ultima per α_r, α^2_r, .. α_r^{n-1}, ed aggiungendo agli elementi della prima colonna quelli della seconda, della terza, . . . dell'ultima moltiplicati per α_r, α^2_r, .. α_r^{n-1}, e moltiplicando quindi di nuovo le linee prima, seconda, ... ultima per α^n_r, α_r^{n-1}, ... α_r si ha

$$(1) \qquad F(x) = \theta_r \begin{vmatrix} \alpha^n_r & q_1 d & q_2 d^2 & \cdot\,\cdot & q_{n-1} d^{n-1} \\ \alpha_r^{n-1} & q_2 d^2 & q_3 d^3 & \cdot\,\cdot & q_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_r & q_0 & q_1 d & \cdot\,\cdot & q_{n-2} d^{n-2} \end{vmatrix}$$

posto

$$(2) \qquad \theta_r = q_0 + q_1 \alpha_r d + q_2 \alpha_r^2 d^2 \ldots + q_{n-1} \alpha_r^{n-1} d^{n-1}.$$

Sia x una qualunque delle μ radici, supposte disuguali, dell'equazione $F(x) = 0$, e sia θ_r il fattore di $F(x)$ che è annullato da quella radice. Derivando rispetto a t l'equazione identica $F(x) = 0$, si ha (lemma 2.°)

$$F'(x)\frac{dx}{dt} + n \begin{vmatrix} h_0 & q_1 d & q_2 d^2 & \cdot\,\cdot & q_{n-1} d^{n-1} \\ h_1 & q_2 d^2 & q_3 d^3 & \cdot\,\cdot & q_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n-1} & q_0 & q_1 d & \cdot\,\cdot & q_{n-2} d^{n-2} \end{vmatrix} = 0$$

ove $h_s = \frac{dq_s}{dt} d_s$; $\frac{dq_s}{dt}$ indica la derivata di q_s rispetto alla

sola t implicita ne' coefficienti. Trasformisi il determinante nell'equazione che precede, moltiplicando le linee seconda, terza, ... ultima per α_r, α^2_r, . . . α_r^{n-1} ed aggiungendo agli elementi dell' ultima colonna moltiplicati per α_r^{n-1} quelli della penultima, terz'ultima, ... seconda moltiplicate per α_r^{n-2}, α_r^{n-2}, . . α_r; avendo riguardo all' equazione identica $\theta_r = 0$, si ha

$$(3) \qquad F'(x)\frac{dx}{dt} - n\alpha_r H = 0$$

posto

$$H = (-1)^n \begin{vmatrix} h_0 & q_0 & q_1 d & \dots & q_{n-2}d^{n-2} \\ h_1 & q_1 d & q_2 d^2 & \dots & q_{n-1}d^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n-1} & q_{n-1}d^{n-1} & q_0 & \dots & q_{n-3}d^{n-3} \end{vmatrix}$$

Sia a una quantità costante, $f(x)$ una funzione razionale ed intera di x; e si moltiplichi la (3) per

$$\frac{f(x)}{\alpha_r(x-a).dF'(x)}$$

si avrà

$$\frac{1}{\alpha_r}\frac{f(x)}{(x-a)d}\frac{dx}{dt} = \frac{nHf(x)}{(x-a)d.F'(x)}.$$

In questa equazione cambio la x successivamente in tutte le radici della $F(x) = 0$; sommando i risultati ed osservando essere $\frac{H}{d}$ una funzione razionale rispetto ad x (lemma 3.°), si ha, per noti teoremi sullo spezzamento delle frazioni razionali

$$\sum_1^\mu \frac{1}{\alpha_r}\frac{f(x)}{(x-a)\,d(x)}\frac{dx}{dt} = -\Pi\frac{nH(x)\,f(x)}{(x-a)\,d(x)\,F(x)} + \frac{nH(a)\,f(a)}{d(a)\,F(a)}$$

indicando col simbolo $\Pi\varphi(x)$ il coefficiente di $\frac{1}{x}$ nello svi-

luppo di $\varphi(x)$ secondo le potenze discendenti di x. Quindi, integrando rispetto a t, si ha

$$(4)\quad \sum_{1}^{\mu} \frac{1}{\alpha_r} \int \frac{f(x)}{(x-a)\, d(x)}\, dx = -\,\Pi\, \frac{f(x)}{(x-a)\, d(x)} \int \frac{n\mathrm{H}(x)}{\mathrm{F}(x)}\, dt$$

$$+ \frac{f(a)}{d(a)} \int \frac{n\mathrm{H}(a)}{\mathrm{F}(a)}\, dt + \text{Cost.}^{e}$$

Ora derivinsi le n equazioni (2) rispetto alla sola t; poi si moltiplichino le equazioni ottenute dalla derivazione, ordinatamente per

$$\alpha_1^n,\ \alpha_2^n, \ldots \alpha_n^n;\quad \alpha_1^{n-1},\ \alpha_2^{n-1}, \ldots \alpha_n^{n-1}; \ldots;$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_n;$$

sommando ciascuna volta le risultanti si ha

$$nh_s = \alpha_1^{n-s} \frac{d\theta_1}{dt} + \alpha_2^{n-s} \frac{d\theta_2}{dt} + \ldots + \alpha_n^{n-s} \frac{d\theta_n}{dt};$$

quindi, essendo

$$\mathrm{H} = h_0 \frac{d\mathrm{H}}{dh_0} + h_1 \frac{d\mathrm{H}}{dh_1} + \ldots + h_{n-1} \frac{d\mathrm{H}}{dh_{n-1}}$$

sarà

$$n\mathrm{H} = (-1)^n \sum_{1}^{n}{}_r \frac{d\theta_r}{dt} \begin{vmatrix} \alpha_r^n & q_0 & q_1 d & \ldots & q_{n-2} d^{n-2} \\ \alpha_r^{n-1} & q_1 d & q_2 d^2 & \ldots & q_{n-1} d^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_r & q_{n-1} d^{n-1} & q_0 & \ldots & q_{n-3} d^{n-3} \end{vmatrix}$$

ovvero

$$n\mathrm{H} = \sum_{1}^{n}{}_r \alpha_r^{n-1} \frac{d\theta_r}{dt} \begin{vmatrix} \alpha_r^n & q_1 d & q_2 d^2 & \ldots & q_{n-1} d^{n-1} \\ \alpha_r^{n-1} & q_2 d^2 & q_3 d^3 & \ldots & q_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_r & q_0 & q_1 d & \ldots & q_{n-2} d^{n-2} \end{vmatrix}$$

e per la (1)

$$\frac{nH}{F}=\sum_{1}^{n}{}_{r}\frac{1}{\alpha_r}\frac{d\theta_r}{dt}\frac{1}{\theta_r},$$

quindi la (4) diviene

$$\sum_{1}^{\mu}\frac{1}{\alpha_r}\int\frac{f(x)}{(x-a)\sqrt[n]{R(x)}}\,dx=-\Pi\frac{f(x)}{(x-a)\sqrt[n]{R(x)}}\sum_{1}^{n}{}_{r}\frac{1}{\alpha_r}\log\theta_r(x$$

$$+\frac{f(a)}{\sqrt[n]{R(a)}}\sum_{1}^{n}{}_{r}\frac{1}{\alpha_r}\log\vartheta_r(a)+\text{Cost.}^{e}$$

In questo risultato consiste appunto il teorema di Abel.

Pavia 2 maggio 1856.



SUR LÉONARD BONACCI DE PISE ET SUR TROIS ÉCRITS DE CET AUTEUR PUBLIÉS PAR BALTHASAR BONCOMPAGNI

ARTICLE DE M. O. TERQUEM (*)

Les coordonnées du centre de gravité de l'homme rapportées à trois plans fixes varient à chaque instant. Lors même que nous nous tenons en repos, la circulation, la respiration, tous les mouvements involontaires de la vie organique, déplacent ce point sans cesse. La ligne décrite par ce centre de gravité, depuis la naissance jusqu'à la mort, est la trajéctoire vitale géométrique de chaque individu. La vitesse, le $\frac{de}{dt}$ en chaque point de cette trajéctoire est sans doute très-variable. Mais si l'on divise la longuer totale de la trajéctoire par le temps, soit par le nombre de secondes qu'on a vécu depuis l'entrée dans le monde jusqu'à la sortie, on obtient une vitesse moyenne qui diffère beaucoup d'un individu à l'autre, d' un peuple à l' autre. Il en est ainsi de la trajéctoire de la vie intéllectuelle. Cette trajéctoire se compose de *pensées* qui se comptent par le *nombre* et se mésurent par le *temps*. Ce nombre et surtout le temps établissent une grande différence entre les esprits: c'est surtout la durée de la pensée qui caractérise les esprits supérieurs. Buffon définit le génie: une aptitude à la patience, c'est-à-dire la faculté de faire durer la pensée, de la maintenir longtemps et avec intensité sur le même sujet. Souvent cette faculté de concentration intellectuelle rend impropre aux occupations vulgaires qui exigent des pensées fugaces et multiples. Il résulte de là que des hommes supérieurs passent souvent pour des *niais* chez les hommes inférieurs. C'est ainsi que les négociants de Pise, compatriotes de Léonard, lui ont donné le sobriquet de *Bighelo-*

(*) Questo articolo del Sig. Terquem si trova già dal medesimo pubblicato nei suoi *Nouvelles Annales des Mathématiques, Paris,* Nov. e Dec. 1855, Janvier, Mars, Avril, Mai 1856. *B. T.*

ne [1] toutefois c' etait un des plus profonds penseurs du siècle de saint Louis et comme tel jusqu' a ce jour presque inconnu. Les érudits savaient que Léonard avait promulgué et propagé la numération et apporté en Occident l'algèbre des Arabes. Ce sont sans doute d'immenses services, mais qui n'ont que le mérite de l'importation première. Mais on ne se doutait guère qu' un géomètre du XIII.e siècle eût dépassé beaucoup Diophante et les Arabes et n'a été dépassé que par Fermat au XVII.e siècle. Découverte historique que nous devons aux persévérantes invéstigations du célèbre prince Boncompagni; découverte infiniment supérieure à ces travaux sur des écrivains obscurs qu'on se plait à tirer des ténèbres du moyen âge, et qui, pour être publiés et illustrés, n'en restent pas moins obscurs. La mise au jour de trois écrits de Léonard enrichit de faits précieux les annales de l'esprit humain. Ce sont les seuls ouvrages qui soient complètement publiés. On en connait sept:

1.° *Liber Abbaci* (1202, et corrigé en 1228); c'est un Traité d'Arithmétique et d'Algèbre. Le XV.e chapitre concerne l'algèbre et a été publié par M. Libri (*Hist. des sciences mathématiques* t. II, p. 307, note III, 1838).

2.° *Practica Geometriae* (1220 à 1221); théorique et pratique.

3.° *Liber quadratorum* (1225) c' est l' oeuvre principale (publié).

4.° *Flos super solutionibus quarundam questionum ad arithmeticam et ad geometriam vel ad utramque pertinentium*, antérieur à 1225 (publié).

5.° *De modo solvendi questiones avium et similium* (publié).

6.° Un commentaire sur le livre X des *Éléments* d'Euclide.

---

[1] *Bighelone* est peut-être le synonyme de Bonacci qui revient au *bonace* français. Il est connu sous le nom de Fibonacci par contraction de Filius Bonacci.

7.° *Libro di merchatanti detto di minor guisa*; n'existe plus, à ce qu'on sache, dans aucune bibliothèque; renfermaits de règles d'alliage des métaux.

Les trois écrits, 3° 4° 5° sont réunis dans un manuscrit du XV.° siècle, sur parchemin, appartênant à la Bibliothèque Ambrosienne de Milan (*E.* 75,*Parte superiore*). La description de ce manuscrit et des détails bibliographiques sur tous les écrits de Léonard sont exposés dans l'ouvrage suivant, avec une érudition et une éxactitude, auxquelles nous ne sommes plus guères accoutumés :

Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Notizie raccolte da Baldassarre Boncompagni, socio ordinario dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei. Roma, Tipografia delle Belle Arti, 1854. In-8, VIII—400 pages.

C' est là que nous puiserons des renseignements sur la vie et les oeuvres dé l'illustre Pisan. (1)

Nous ne connaissons d'autres circonstances de la vie de Léonard, que ce qu'il nous en apprend lui-même au commencement de son *Traité de l'Abaque*, et qu'on trouve dans l'ouvrage de M. Libri (*Histoire des sciences mathématiques*, t. II, p. 287, 1838). En voici la traduction :

» Ici commence le livre de l'*Abacus* composé par Léonard, » fils de Bonacci de Pise, dans l'année 1202.

» Mon père était constitué à Bougie par les marchands » de Pise, comme greffier public (*publicus scriba*) (2) à la

---

(1) M. Boncompagni, dans l'Avertissement, page III, fait savoir que tout ce qu'on trouve dans cet écrit doit être reproduit dans un ouvrage plus vaste qu'il se propose de faire sous le titre : *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano* et dont une partie a déjà été publiée dans les *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, tomo V, anno V (1851—52), pages 5—91, 208—246.

(2) *Scriba*. Il y en a qui voient là un notaire : c' est probablement une éspèce de consul commercial.

» Douane de Bougie. Comme il y avait continuellement af-
» fluence de commerçants chez lui, il me fit venir dès mon
» enfance, et voulut que je restasse pendant quelque temps
» pour m'appliquer à l'étude de l'*abaque*, en vue d'un profit,
» d'une utilité à venir. Un admirable maître m'ayant initié
» dans l'art des figures indiennes, je pris tant de plaisir à
» l'esprit de cet art que je voulus savoir tout ce qu'on en-
» seignait là-dessus en Egypte, en Syrie, dans la Grèce, en
» Sicile, et dans la Provence (*Proventiam*), avec les diverses
» variétés. Ayant parcouru auparavant ces contrées, je m'y
» struisis par beaucoup d' études et de discussions, mais
» je considérai tout ceci et même l' Algorisme de Pytha-
» ghore (*Pictagorae*) comme défectueux en comparaison de
» la méthode indienne. C'est pourquoi ayant serré de plus
» près cette méthode et étudié plus attentivement, y ajou-
» tant quelque chose de mon propre fonds, et y appliquant
» quelques artifices géométriques d'Euclide, j'ai travaillé à
» la composition de cet ouvrage, et pour être le plus in-
» telligible qu'il m'est possible, je l'ai divisé en quinze cha-
» pitres distincts. J' ai tout donné avec des raisonnements
» démonstratifs, afin que ceux qui aspirent à cette scien-
» ce, seulement parce qu'elle est plus parfaite que les au-
» tres, puissent s'instruire et qu'à l'avenir la gente latine
» ne s'en trouve pas dépourvue comme jusqu'à présent.

» Si par hasard je n' ai pas dit assez, ou trop, et plus
» qu'il n'est nécessaire, je prie qu'on ait de l' indulgence
» pour moi; car il n' y a personne qui n' ait quelque dé-
» fauts et qui soit circonspect en toutes choses et par-tout.»

Léonard avait au moins une vingtaine d'années, en écrivant son abaque en 1202, ce qui porte l'année de sa naissance entre 1170 ou 1180; on ignore l'année de sa mort. Il y en a qui le font voyager vers Constantinople à la fin du XIII.[e] siècle, ce qui est impossible. Quoi qu' il en soit il est certain que notre géomètre était à Pise en 1225, lors du passage de l'empereur Fréderic II.

Ce souverain dédaignant les idées regnantes, ennemi des croisades, projeta l'indépendance de l'Italie, sa patrie. Il eut à combattre d'ambitieux compétiteurs, d'audacieux pontifes romains et mourut à la peine. Malgré ces tribulations, il cultivait les lettres, la poésie, et composa un ouvrage estimé encore aujourd'hui sur la chasse. Aimant aussi les sciences, il encouragea les savants, et avait dans sa suite deux géomètres de mérite, à en juger par le choix des questions qu'ils adressèrent à Léonard et dont les réponses ont donné naissance aux trois écrits mentionnés (3°, 4°, et 5°).

L'un de ces géomètres est Jean de Palerme. Le lieu de sa naissance est la seule chose qu'on en connaisse. Il a proposé trois questions en présence de l'Empereur; sorte de tournois scientifiques, qui se sont maintenus jusqu'au XVIIe. siècle.

Le second savant est un nommé Théodore. Il eut à soutenir une joute philosophique contre un docteur de l'ordre des frères Prêcheurs, premier nom des Dominicains, fondé à Toulouse en 1215. Voici comment le fait est raconté par le P. Thomas Malvenda, *lui-même Dominicain*, dans son *Histoire des frères Prêcheurs, sous l'année* 1238 (*Annalium Sacri Ordinis Praedicatorum centuria prima A R. P. F. Thoma Malvenda. Neapoli MDCXXVII.*) C'est un trait curieux des moeurs du temps.

« Le frère Roland, Crémonais de nation, qui passait pour » grand philosophe dans ce siècle, était le premier des frères » Prêcheurs qui fut licencié et docteur de l'Université de » Paris. Il composa avec beaucoup de finesse un résumé de » philosophie, car il était très-érudit en matières théologi» ques et philosophiques. Étant une fois à Crémone, il apprit » de quelques frères Prêcheurs, qui revenaient de l'armée de » Fréderic II, assiegeant alors Brescia (1238), que le phy» losophe de l'Empereur les avait embarassés de questions » au sujet de la philosophie de Roland, sur lesquelles ils ne

» savaient pas répondre. Enflammé de zèle pour son ordre il
» dit: « Préparez-moi un âne. » Car il était goutteux et ne
» pouvait aller à pied. Cela étant fait, assis sur l'âne, il entra
» accompagné de quelques frères Prêcheurs dans le camp et
» commença per demander où était le philosophe. Beaucoup
» d'hommes considérables qui connaissaient et honoraient le
» philosophe s'étant réunis, et le philosophe étant appelé,
» Roland lui dit: « Afin que tu saches, toi, maître Théodore,
» que l'ordre des frères Prêcheurs a des philosophes, je te
» donne le choix, en présence de ceux-ci, de faire des obje-
» ctions ou de preparer des réponses sur quelque partie de la
» philosophie que tu veuilles. » Comme Théodore choisit les
» *objections* de preference aux *reponses*, Roland remporta
» dans cette lutte remarquable une victoire glorieuse, qui
» fut pour l'ordre un grand honneur et une grande gloire. »
(*Intorno ad alcune opere* etc. p. 47).

Ce résultat serait moins contestable, s'il était raconté par une personne étrangère à l' *ordre*, car les corporations, système d'esprits concentrés en un seul esprit, possèdent à un dégré éminent l'art d'arranger les faits, et ne se font pas faute d'exercer cet art.

Passons à l'analyse des *Tre scritti* :

Le premier écrit est intitulé *Flos* (p. 1—44),
Le deuxième ———————— *de Avibus* (p. 44—54);
Le troisième ———————— *Liber quadratorum* (p.55—122).

En tête du *Flos* on lit: *Incipit Flos Leonardi Bigolli Pisani super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et geometriam vel ad utrumque pertinentium.* Il est dédié au cardinal Raniero Capocci de Viterbe, créé cardinal au titre de Sainte Marie en Cosmedin, par le célèbre pape Innocent III. Ce cardinal, qui parait avoir aimé et cultivé les mathématiques pures, avait démandé à Léonard une copie de ses ouvrages ; *Quod meorum operum copiam non praeceptive saltim, quod vos magis decebat, sed simpliciter petere fuistis per litteras*

Vestrae Sanctitatis dignati. « Vous n'avez pas commandé comme il appartenait à votre dignité, mais vous avez daigné » demander simplement une copie de mes ouvrages ». Il l'a intitulé *Flos*, en honneur de Son Eminence, rayonnant d'une éloquonce fleurie parmi les savants, *florida clericorum elegantia radiantibus*, et aussi parce que plusieurs questions quoique épineuses (*nodose*), sont exposées d'une manière fleurie (*floride*); et de même que les plantes ayant des racines en terre surgissent et montrent au jour des fleurs, ainsi de ces questions on en déduit une foule d'autres. Il finit par dire qu'il se soumettra aux corrections que le cardinal voudra lui indiquer (*et me ipsum correctioni Dominationis Vestrae affectuosius supponendo*).

On lit ensuite ce nouveau titre: *Explicit prologus, incipit tractatus ejusdem.* Ceci a besoin d'explication. Il paraît que Léonard mit par écrit les réponses qu'il fit aux questions de Jean de Palerme, lors du passage de Frédéric II par Pise, et il adressa cet écrit à l'empereur. (*Cum coram Majestate Vestra, gloriosissime princeps Friderice, magister Johannes Panormitanus, phylosophus vester, ipsis mecum multa de numeris contulisset*).

Le cardinal, ayant eu connaissance de cet écrit, en demanda une copie. Alors Léonard fit une seconde édition sous le titre de *Flos*, qu'il dédia au cardinal, et cette dédicace sert de prologue qui explique le titre *Flos explicit prologus*, et puis commence le traité, *Incipit tractatus ejusdem.*

La première question est: Trouver un nombre carré qui, augmenté et diminué de 5, reste toujours un nombre carré (p. 2.). Léonard répondit à maître Jean que le nombre carré est :

$$11 + \frac{2}{3} + \frac{1}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2,$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2,$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 \quad (1)$$

Après avoir longtemps réfléchi sur la solution de cette question, il vit qu'elle tenait à certaines propriétés générales des nombres carrés, ce qui, dit-il, lui donna occasion de composer un opuscule sur les nombres carrés pour *glorifier Sa Majesté*, et qui contiendra les raisonnements et les démonstrations.

Et cum diutius cogitassem unde oriebatur predictae questionis solutio, inveni ipsam habere originem ex multis accidentibus, quae accidunt quadratis numeris, et inter quadratos numeros; quare hinc sumens materiam, libellum incepi componere ad Vestre Majestatis Celsitudinis gloriam, quem Libellum Quadratorum *intitulavi.*

La seconde question est géométrique : il s'agit de trouver, au moyen des quinze éspèces de longueurs du X.[e] livre d'Euclide une longueur x, qui satisfasse à la condition

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Léonard démontre d'une manière très-rigoureuse, qu'aucune des quinze longueurs Euclidiennes ne peut satisfaire, par des considérations géométriques, que M. Woepcke a traduites avec intelligence en caractères algébriques, qui donnent toujours plus de précision et plus de clarté quand il s'agit de nombres (*Journal* de M. Liouville, t. XX. 1855). En voici la substance. La valeur de x est comprise entre 1 et 2; donc x n'est pas un nombre entier.

---

(1) Nous nous servons de signes actuellement en usage.

1.° x n'est pas non plus un nombre fractionnaire $\frac{\alpha}{\beta}$ qu'on peut toujours supposer irréductible; ou on a :

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{2\alpha^2}{\beta^2}+\frac{10\alpha}{\beta}=\frac{\alpha[\alpha^2+(2\alpha+10\beta)\beta]}{\beta^3}=20\,;$$

équation impossible.

Léonard se sert d'un moyen qui revient au même, mais qui est plus long. Il suit la méthode des Arabes qui décomposent la puissance des fractions en une somme de fractions ordonnées suivant la puissance négative du dénominateur. Par exemple,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{\alpha_1}{b^m}+\frac{\alpha_2}{b^{m-1}}+\frac{\alpha_3}{b^{m-2}}+\ldots+\frac{\alpha_m}{b},$$

les α sont plus petits que b, à l' exception des α_m, qui peut surpasser b; cela revient à écrire les fractions dans un système de numération dont la base est b, ainsi

$$\frac{\alpha_3}{\beta^3}=\frac{\alpha_1}{\beta^3}+\frac{\alpha_2}{\beta^2}+\frac{\alpha_3}{\beta}\ldots$$

2.° x ne peut avoir la forme $\sqrt{n}$, où n est rationnelle, car $x=\frac{20-2x^2}{x^2+10}$; équation impossible.

3.° x n'est pas de la forme $\sqrt[4]{n}$; on aurait

$$n^{\frac{1}{4}}+\frac{n^{\frac{3}{4}}}{10}=2-\frac{2n^{\frac{1}{2}}}{10}\,;$$

équation dont Euclide démontre l'impossibilité (livre X, 38).

Observation. D'après un théorème connu, on peut démontrer directement que l'équation donnée, et l' équation

$$x^4-n=0$$

ne peuvent avoir de racines communes. Ce même moyen de démonstration est applicable à tous les cas.

4.° x n'a aucune des formes

$$\sqrt{m} + \sqrt{n}\,,\ \sqrt{\sqrt{m} + \sqrt{n}}\,,\ \sqrt{\sqrt{m} + \sqrt{n}}\,;$$

ces lignes *apotomes, mediales, binomiales* d'Euclide étant exclues, Léonard donne, on ne sait par quelle méthode, cette valeur approchée d'une surprenante exactitude : [1]

$$x = 1.\ 22'.\ 7''.\ 42'''.\ 30^{\text{IV}}.\ 4^{\text{V}}.\ 40^{\text{VI}},$$

car, à la manière arabe il procède par soixantièmes.

M. Woepeke trouve

$$x = 1,\ 368808107821;$$

réduite en fractions sexagésimales, il trouve

$$x = 1.\ 22'.\ 7''.\ 42'''.\ 33^{\text{IV}}.\ 4^{\text{V}}.\ 38.\ 5^{\text{VI}}.$$

Les 30^{IV} de Léonard sont une faute du copiste qui a mis 30 au lieu de 33, faute qui se reproduit encore dans trois autres endroits.

M. Lebesgue conjecture avec raison que Léonard se sera servi de cette méthode suivante employée depuis par Viète. L'équation n'ayant qu'une seule racine positive, on fait

$$x = 1 + \frac{y}{60};$$

l' équation en y n'a encore qu' une seule racine positive, dont on trouve facilement la partie entière, et ainsi de suite (Tortolini, *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*, Aprile 1855, p. 155.)

M. Lebesgue fait observer que Léonard a bien vu que le Traité des Incommensurables d'Euclide gagnerait à être exposé numériquement. Non-seulement il a *vu*, mais il a fait cette exposition numérique :

---

[1] *Quia hec questio solvi non potuit in aliquo suprascriptorum, studui solutionem ejus ad propinquitatem reducere.*

Et quia difficilior est antecedentium et quorumdam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum X.^m librum glosare incepi, reducens intellectum ejus ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur (p. 3).

Aussi tous ses raisonnements roulent sur les nombres, qu'il représentait, il est vrai; pa des lignes, n'ayant pas encore des signes algébriques à sa disposition. Il *parle* algèbre comme les Arabes, mais ne sait pas l'écrire; cela arrive même quelquefois à des géomètres de nos jours.

Le célèbre arithmologue de Bordeaux établit les quatre propositions suivantes :

I. P, Q, R, S, m, n, étant six nombres *rationnels*, et m, n, mn, $\frac{m}{n}$ n'étant pas des carrés, l'équation

$$P + Q\sqrt{m} + R\sqrt{n} + 5\sqrt{mu} = 0$$

ne peut subsister à moins que l'on n'ait

$$P = Q = R = S = 0,$$

car on déduit de cette équation

$$P^2 + mQ^2 - n(R^2 + mS^2) = 2(nRS - PQ)\sqrt{m};$$

donc

$$P^2 + mQ^2 = n(R^2 + mS^2),\ nRS = PQ;$$

de là

$$(PR - mQS)(PS - QR) = 0,$$

$$PR - mQS = 0,\quad PS = QR,$$

et

$$PS^2 = QRS = \frac{PQ^2}{n},\quad n = \frac{Q^2}{m} = \left(\frac{Q}{P}\right)^2,$$

contraire à l'hypothèse;

$$PR = mQS,\ PQR = mQ^2S = nR^2S,\ \frac{m}{n} = \left(\frac{R}{Q}\right)^2,$$

contraire à l'hypothèse.

On ne peut donc satisfaire à l' équation, qu'en posant

$$P = Q = R = S = 0.$$

II. Si l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

a ses coefficients rationnels, $\alpha, \beta, \gamma, m, n$ étant cinq nombres rationnels, $m, n, \frac{m}{n}$ n' étant pas des carrés, on ne peut avoir

$$x = \alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n},$$

à moins que β ou γ ne soit nul. En effet, on a

$$x^2 = \alpha' + \beta'\sqrt{m} + \gamma'\sqrt{n} + \delta'\sqrt{mn},$$
$$x^3 = \alpha'' + \beta''\sqrt{m} + \gamma''\sqrt{n} + \delta''\sqrt{mn},$$

les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres rationnels.

Substituant ces valeurs dans l'équation donnée, et égalant à zéro les coefficients des irrationnels et la quantité rationnelle, on obtient quatre équations. Les coefficients de $\sqrt{m}$ et $\sqrt{n}$ donnent

$$\beta'' + A\beta' + B\beta = 0,$$
$$\gamma'' + A\gamma' + B\gamma = 0,$$

de là

$$\beta''\gamma - \beta\gamma'' = 0.$$

Mettant pour β'', γ'' leurs valeurs, savoir

$$\beta'' = \beta(3\alpha^2 + m\beta^2 + 3n\gamma^2), \quad \gamma'' = \gamma(3\alpha^2 + n\gamma^2 + 3m\beta^2),$$

on obtient

$$2\beta\gamma(m\beta^2 - n\gamma^2) = 0,$$

on ne peut mettre

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2,$$

Donc l'on a

$$\beta = 0, \quad \text{ou} \quad \gamma = 0.$$

III. Si l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

n'a que des coefficients rationnels, il n'y a pas de racine de la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n}}$, à moins que β ou γ ne soit nul.

Car on a

$$(x^3 + Bx)^2 - (Ax^2 - C)^2 = 0\,;$$

faisant $x^2 = y$, on trouve

$$y^3 + A_1\, y^2 + B_1\, y + C^2 = 0;$$

A_1 et B_1 sont rationnels.

Cette équation n'a pas de racine de la forme

$$x + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n},$$

à moins que β et γ ne soient nuls. Donc l'équation n'a pas de racine de la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n}}$.

IV. Supposons $\gamma = 0$; l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

ne peut avoir une racine de la forme $\alpha + \beta\sqrt{m}$, à moins d'avoir une racine réelle, car elle a aussi pour racine $\alpha - \beta\sqrt{m}$; et α, par conséquent, un facteur rationnel du second dégré; donc aussi un facteur rationnel du prèmier dégré. On démontre de même que l'équation n'a pas une racine de la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m}}$, à moins que l'équation en y n'ait une racine rationnelle.

Il suit de tout ceci que l'équation de Léonard n'a aucune racines de ces quatre formes

$$\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n}\,,\ \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n}}\,,$$

$$\alpha + \beta\sqrt{m}\,,\ \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m}}\,;$$

ce sont les irrationnelles du X.ᵉ livre d'Euclide.

Voici la troisième et dernière question proposeé par maître Jean :

De tribus hominibus pecuniam communem habentibus (p.17). *in palatio vestro Pisis coram Vestra Majestate.*

Nous traduisons la question, avec M. Boncompagni, en langage algébrique:

Trois hommes ont *en commun* une somme inconnue t; la part du premier est $\frac{1}{2}t$; du second $\frac{1}{3}t$; et par conséquent du troisième $\frac{1}{6}t$. Voulant déposer cette somme en lieu plus sûr (*ad tutiorem locum*), ils prennent au hasard (*fortuitu*) le premier x qui n' en dépose que $\frac{1}{2}x$; le second y et n'en dépose que $\frac{1}{3}y$, et le troisième z et n'en dépose que $\frac{1}{3}z$; de sorte que la somme déposée se monte à

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z,$$

et lorsqu'ils retirent ce dépôt, chacun en prend le tiers; il s'agit de trouver les valeurs de x, y, z. Faisons

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) = u,$$

c'est u, qu'il appelle la *chose* (*posui rem*).

Le premier a gardé $\frac{1}{2}x$ et reçoit u; donc on a

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}t - u;$$

de même pour le second

$$\frac{2}{3}y + u = \frac{1}{3}t - u,$$

et pour le troisième

$$\frac{5}{6}z + u = \frac{1}{6}t - u;$$

De là on tire

$$x = t - 2u\,,\quad y = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}u\,,\quad z = \frac{1}{3}t - \frac{6}{5}u\,,$$

$$x+y+z=t=\frac{17}{10}t - \frac{47}{10}u\,,\quad \frac{7}{10}t = \frac{47}{10}u\,,\quad 7t = 47u\,;$$

problème indéterminé.

Il pose $u = 7$, (*si ponatur rem esse VII*). On a

$$t = 47\,,\ x = 33\,,\ y = 13\,,\ z = 1.$$

Ces équations traduisent fidèlement la suite des raisonnements de l'auteur; il dit qu'il y a trois modes de solutions, qu' il a donnés *in libro nostro quem de Numero composui.* C'est son Traité *de Abaco.*

Les nombres écrits tantôt en chiffres romains, tantôt en chiffres arabes.

De quinque numeris reperiendis ex propositionibus datis (p. 20).

Léonard dit avoir résolu par la même méthode deux autres questions, qu'il a transmises à Sa Majesté par le page Robert : (*quas per Robertinum aggiū* (sic) *Domnicellum vestrum, vestre Majestati transmisi*).

On verra que cette méthode consiste à écrire les inconnues *circulairement.* Nous copions ces deux questions en écriture moderne d'après M. Boncompagni, et en conservant la marche de l'auteur.

Première question. Trouver cinq nombres x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tels, qu'on ait

$$(\text{A})\quad \left\{\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4) &= x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5) \\ &= x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_5 + x_1) \\ &= x_4 + \frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2) \\ &= x_5 + \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3)\,, \end{aligned}\right.$$

et il prend à tout hasard (*fortuitu*) chacune de ces sommes égale à 17. Il appelle la premiére inconnue x_1 la *cause* (*causa*).

La première équation donne

(E) $$x_2 + x_3 + x_4 = 34 - 2x_1 ,$$

et de là

(F) $$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34 + x_5 - 2x_1 ,$$

Soustrayant de cette équation la seconde des équations (A), il vient

$$\frac{2}{3}(x_3 + x_4 + x_5) = 17 + x_5 - 2x_1,$$

$$\frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5) = 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_5 - x_1 ,$$

Ajoutant ces deux dernières équations, on obtient

(G) $$x_3 + x_4 + x_5 = 25 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - 2x_1.$$

Soustrayant cette équation (G) de l'équation (F) on a

(H) $$x_2 = 8 + \frac{1}{2} + x_1 - \frac{1}{2}x_5 .$$

L'équation (G) donne aussi

(I) $$x_3 + x_4 + x_5 + x_1 = 25 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - 2x_1.$$

Soustrayant de cette dernière équation la troisième des équations (A), on a

$$\frac{3}{4}(x_4 + x_5 + x_1) = 8 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - 2x_1 ,$$

$$\frac{1}{4}(x_4 + x_5 + x_1) = 2 + \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - \frac{2}{3}x_1 .$$

Ajoutant ces deux équations

(J) $$x_4 + x_5 + x_1 = 11 + \frac{1}{3} + 2x_5 - \left(2 + \frac{2}{3}\right) x_1 .$$

Soustrayant cette équation de (I)

(K) $$x_3 = 14 + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{2} x_6 .$$

L'équation (J) donne

(L) $$x_4 = 11 + \frac{1}{3} + x_5 - \left(3 + \frac{2}{3}\right) x_1 .$$

On déduit de l'équation (H)

$$x_5 + x_1 + x_2 = 8 + \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2} x_5,$$

$$\frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2) = 1 + \frac{7}{10} + \frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{10} .$$

Ajoutant cette équation à l'équation (L),

$$x_4' + \frac{1}{5}(x_5 + x_1 - x_2) = 13 + \frac{1}{30} + \left(1 + \frac{1}{10}\right) x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 .$$

Ainsi la quatrième des équations devient

$$13 + \frac{1}{30} + \left(1 + \frac{1}{10}\right) x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 = 17,$$

$$13 + \frac{1}{30} + \frac{11}{10} x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 = 17,$$

(*)

$$13 + \frac{1}{30} + \frac{11}{10} x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 = 17,$$

$$\frac{11}{10} x_5 = \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 + 4 - \frac{1}{30} ,$$

(M) $$x_5 = \left(3 - \frac{1}{33}\right) x_1 + 3 + \frac{20}{33} .$$

Les équations (H) et (K) donnent

(*) *Sic.*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 22 + \frac{2}{3} + \left(2 + \frac{2}{3}\right)x_1 - x_5 ,$$

$$\frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3) = 3 + \frac{7}{9} + \frac{4}{9}\, x_1 - \frac{1}{6} x_5 .$$

La sixième des équations (A) devient

$$\frac{6}{6} x_5 + \frac{4}{9} x_1 + 3 + \frac{7}{9} = 17 ,$$

$$\frac{5}{6} x_5 + \frac{4}{9} x_1 = 13 + \frac{2}{9} ,$$

$$\text{(N)} \qquad x_5 + \frac{8}{15} x_1 = 15 + \frac{13}{15} .$$

Mettant dans cette équation la valeur de x_5, tirée de (M), on a

$$\left(3 - \frac{1}{33} + \frac{8}{15}\right) x_1 + 3 + \frac{20}{33} = 15 + \frac{13}{15} ,$$

$$\left(3 + \frac{83}{105}\right) x_1 = 12\ \frac{43}{105} ,$$

$$578 x_1 = 2023 ,$$

$$x_1 = 3 + \frac{1}{2} .$$

Multipliant cette équation et chacune des équations (H), (K), (L), (M) par 2, on obtient :

$$\text{(P)} \left\{ \begin{aligned} 2x_1 &= 7, \\ 2x_2 &= 17 + 2x_1 - x_5, \\ 2x_3 &= 28 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, 2x_1 - x_5 , \\ 2x_4 &= 22 + \frac{2}{3} + 2x_5 - \left(3 + \frac{2}{3}\right) 2x_1 , \\ 2x_5 &= \left(3 - \frac{1}{33}\right) 2x_1 + 7 + \frac{7}{33} . \end{aligned} \right.$$

Mettant dans cette équation 7 au lieu de $2x_1$, on a

$$2x_5 = 28,$$
$$x_5 = 14.$$

Si l'on met dans les équations (P) 7 à la place de $2x_1$ et 14 au lieu de x_5, on obtient

$$2x_2 = 10, \quad 2x_3 = 19, \quad 2x_4 = 25.$$

Dans tout ceci, Léonard donne le nom de *causa* à x_1 et celui de *res* à x_5, à l'instar des Arabes qui, lorsq'ils ont deux inconnues, les distinguent par des noms différents (Woepcke, *Extrait du Fakhrî*; imprimerie impériale, 1853).

Cette disposition circulaire présente l'avantage de pouvoir calculer de suite les valeurs des inconnues quand on connaît la valeur d'une seule.

Cet exemple pris au berçeau de la science nous montre quel immense service l'écriture algébrique a rendu à la langue algébrique.

De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta questio notabilis (p. 25).

C'est la seconde question.

Quatre hommes ont: le premier x_1, le deuxième x_2, le troisième x_3, le quatrième x_4 *besants*; ils trouvent une bourse contenant t besants l'on a :

$$t + x_1 = 2(x_2 + x_3),$$
$$t + x_2 = 2(x_3 + x_4),$$
$$t + x_3 = 2(x_4 + x_1),$$
$$t + x_4 = 2(x_1 + x_2):$$

il s'agit de trouver les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4, t.

« Je demontrerai que la question est impossible, à moins » que l'on n'accorde que le premier homme a une dette. » *Hanc quidem questionem insolubilem esse monstrabo, nisi concedatur primum hominem habere debitum.*

En effet il parvient à l'équation

$$\left(4 + \frac{2}{5}\right) x_2 + \left(6 + \frac{3}{5}\right) x_1 = \left(3 - \frac{1}{3}\right) x_2 + \frac{9}{13} x_1 ,$$

équation impossible; car

$$4 + \frac{2}{5} > 3 - \frac{1}{13}, \quad 6 + \frac{3}{5} > \frac{9}{13} .$$

Mais en admettant que x_1 est une dette, alors

$$\left(4 + \frac{2}{5}\right) x_2 - \left(6 + \frac{3}{5}\right) x_1 = \left(3 - \frac{1}{13}\right) x_2 - \frac{9}{13} x_1 ;$$

de là

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{4},$$

problème indéterminé. Il pose $x_1 = 1$, alors

$$x_2 = 4 , \quad x_3 = 1 , \quad x_4 = 4 , \quad t = 11.$$

Dans cette question, il nomme *bursa* l'inconnue t; *dragma* l'inconnue x_1, et *res* l'inconnue x_2.

De eadem re (p. 28).

Première *question indéterminée*

$$\begin{aligned} x_1 + t &= a(x_2 + x_3), \\ x_2 + t &= (a + 1)(x_3 + x_4), \\ x_3 + t &= (a + 2)(x_4 + x_1), \\ x_4 + t &= (a + 3)(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Léonard dit qu'il faut en général prendre

$$x_1 = -1 , \quad x_3 = +1 , \quad x_2 = x_4 ,$$

ce qui donne

$$x_2 = x_4 = a + 2 , \quad t = a^2 + 3a + 1.$$

Dans l'exemple particulier donné par l' auteur $a = 4$, alors $t = 29$. Léonard trouve

$$t = 4 + 6 + 8 + 10 + 1 ;$$

mais cette progression arithmétique n'est applicable que pour ce cas-là, et pas en général.

Deuxième *question*

$$x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3) = 14,$$

$$x_2 + \frac{1}{4}(x_3 + x_1) = 17,$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2) = 19.$$

Par une suite très-longue de raisonnements très-simples, il trouve

$$x_1 = 4\,\frac{41}{50},\ x_2 = 11\,\frac{44}{50},\ x_3 = 15\,\frac{33}{50}.$$

Il prend pour inconnue (*res*) $x_2 + x_3$; écrit les nombres accompagnés de fractions à la manière orientale :

$$\frac{41}{50}\,4,\ \frac{44}{50}\,11, \text{ au lieu de } 4\,\frac{41}{50},\ \ 11\,\frac{44}{50}.$$

Le numérateur est le nombre *supra virgam* et le dénominateur *sub virga*.

Il dit à l'empereur: « Vous savez que j'ai traité cette » question de deux manières différentes dans le XIII[e] cha- » pitre de mon livre ([1]), mais ce nouveau mode de solu- » tion me plaît mieux que les autres, et j'ai voulu en faire » part à Sa Majesté. »

Pateat quidem Serenitati Vestre hanc questionem a me solutam esse in tertio decimo capitulo libri mei dupliciter, sed quia hujus solutionis inventio placet mihi pre ceteris modis, volui eam Vestre pandere Majestati.

([1]) Sans doute l'*Abaque*.

Ce serait de la part de Léonard une grande naïvete, s'il croyait que Fréderic II ait pris connaissance des deux premières solutions et s'enquiert de la troisième.

De quatuor hominibus bizantios habentibus (p. 33).

Cette question est dédiée au Cardinal Ranieri. Elle donne lieu à ces quatre équations:

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4) = 33,$$

$$x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = 35,$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_1 + x_2) = 36,$$

$$x_4 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3) = 37;$$

x_1, x_2, x_3, x_4 réprésentent les nombres de *besants* qu'ont le premier, deuxième, troisième, et quatrième homme. Il dit avoir choisi à dessein (*studiose*) les nombres pour que les inconnues soient des nombres entiers et pour montrer que la question est insoluble. Voici sa marche, qui est la même pour tout ce genre d'équations. Il prend pour inconnue

$$x_2 + x_3 + x_4;$$

faisant donc

$$x_2 + x_3 + x_4 = z,$$

alors

$$x_1 = 33 - \frac{1}{2} z,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 33 + \frac{1}{2} z$$

$$x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = 35$$

$$\frac{2}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = \frac{1}{2} z - 2$$

$$\frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = \frac{1}{4} z - 1$$

$$(x_3 + x_4 + x_1) = \frac{3}{4} z - 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 33 + \frac{1}{2} z$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_1 + x_2) = 36$$

$$\frac{3}{5}(x_4 + x_1 + x_2) = \frac{1}{2} z - 3$$

$$x_4 + x_1 + x_2 = \frac{2}{3} z - 4$$

En suivant le même procédé, il trouve

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{8} z - 5.$$

Récapitulant

$$x_2 + x_3 + x_4 = z,$$

$$x_3 + x_4 + x_1 = \frac{3}{4} z - 3,$$

$$x_4 + x_1 + x_2 = \frac{2}{3} z - 4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{8} z - 5,$$

additionnant ces équations, on obtient

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 3\,\frac{1}{24}\,z - 12,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\,\frac{1}{72}\,z - 4,$$

$$x_1 = \frac{1}{72}\,z - 4 = 33,$$

$$x_1 + \frac{1}{2}\,z = \frac{37}{72}\,z - 4\,,$$

$$z = 72,$$

$$x_1 + 36 = 33\,.$$

Ainsi la question est impossible (*colligitur inde hanc questionem insolubilem esse*), à moins qu'on n'accorde, que le premier homme a une dette (*debitum habere*) de 3 besants, savoir la différence entre 33 et 36 [1]; ainsi $x_1 = -3$; de là il conclut facilement

$$x_2 = 18\,,\quad x_3 = 25\,,\quad x_4 = 29.$$

Si, dit-il, au lieu des nombres 33, 35, 36, 37, on prend 181, 183, 184, 185, alors

$$x_1 = 1,\quad x_2 = 94\,,\quad x_3 = 105\,,\quad x_4 = 141.$$

Ce mode de solution est très-remarquable et s'applique avec avantage à un système quelconque d'équations du premier dégré, de cette forme :

$$\begin{aligned}
&x_1 + b_1\,(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = c_1\,,\\
&x_2 + b_2\,(x_3 + x_4 + \ldots + x_n + x_1) = c_2\,,\\
&x_3 + b_3\,(x_4 + x_5 + \ldots + x_n + x_1 + x_2) = c_3\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n + b_n\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1) = c_n\,.
\end{aligned}$$

---

[1] Idée juste des quantités négatives.

De quatuor hominibus qui invenerunt bizantios. (p. 36).

Quatre hommes trouvent une somme de besant; ils prennent au hasard premier x_1, le deuxième x_2, le troisième x_3, et le quatrième x_4 besant. Voulant faire égal partage, le premier double la somme prise par le second, le second triple la somme au troisième, le troisième quadruple la somme au quatriéme, et le quatrième quintuple au premier ce qu'il lui reste après avoir doublé la somme du second, et alors le parts sont égales.

On trouve facilement que les quatre parts seront

$5(x_1 - x_2)$, $2(x_2 - x_3)$, $3(x_3 - x_4)$, $4(x_4 - x_1 + x_2)$;

problème indéterminé. Il prend 60 pour la part de chacun, alors

$$x_1 = 89, \quad x_2 = 77, \quad x_3 = 47, \quad x_4 = 27.$$

Questio similis suprascripte de tribus hominibus (p. 42).

Question analogue à la précédente, mais un peu plus compliquée.

Ici se termine la première partie du *Flos*.

Epistola suprascripti Leonardi ad magistrum Theodorum philosophum Domini Imperatoris (p. 44).

L'auteur dit avoir composé ce livre à la prière d'un ami qui voulait connaître le moyen de résoudre les questions sur les *oiseaux* et autres semblables, énoncées ci-dessous, et il dit avoir trouvé aussi le moyen de résoudre ainsi ce qui concerne les divers alliages des métaux (*omnes diversitates consolaminum monetarum* [1]). En effet, le problème qu'on valire, est aussi une règle d'alliage.

---

[1] *Solamen* soulagement, de là *solatium* soulagement des douleurs, et aussi en terme de droit, indemnité, compensation, et peut-être *monetarum consolamen* est améliorer les monnaies, en déterminer le prix intrinsèque; en italien, *consolar*, aider quelqu'un. C'est le *Tollet-rechnung*, le *calcul-Tollet* des arithméticiens allemands; au moyen des jetons à calculer, on tire (Tollet) un métal d'un autre (Kästner, *Hist. des Math.*, t. I, p. 40).

De avibus emendis secundum proportionem datam.

Quelqu'un achète des moineaux, des tourterelles et des colombes, en tout 30 oiseaux pour 30 deniers; 3 moineaux coûtent 1 denier, de même 2 tourtourelles; et une colombe coûte 2 deniers. On demande combien il y avait d'oiseaux de chacune de ces trois espèces.

Voici le mode de solution de Léonard :

» J'ai posé (*posui*) d'abord trente moineaux pour 10 de-
» niers et j'ai mis de côté 20, différence entre 30 et 10, et j'ai
» changé un des moineaux en tourterelle ; l'augmentation
» par suite de ce changement est d'un sixième de denier;
» car le moineau coûte $\frac{1}{3}$ de denier, et la tourterelle $\frac{1}{2}$
» denier, et $\frac{1}{2}$ moins $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{6}$; j'ai changé derechef un
» moineau en colombe et j'ai gagné par ce changement
» $1\frac{2}{3}$ denier, différence entre 2 deniers et $\frac{1}{3}$ de denier; je
» réduis le tiers en sixièmes, on obtient $\frac{10}{6}$. Je dois ainsi
» changer les moineaux en tourterelles et en colombes jusqu'à
» ce que j'obtienne les 20 que j'ai réservés ci-dessus; je re-
» duis ces 20 aussi en sixièmes et l'on a $\frac{120}{6}$ que j'ai di-
» visés en deux parties, dont l'une puisse se diviser inté-
» gralement par 10 et l'autre par 1, et la somme des deux
» divisions ne doit pas surpasser 30; la première est 110,
» et l'autre 10; j'ai divisé la première partie, savoir 110
» par 10, et la seconde par 1, et j'ai eu 11 colombes et
» 10 tourterelles, lesquelles retranchées de 30, nombre
» des oiseaux, il reste 9 pour le nombre des moineaux, et
» les 9 moineaux valent 3 deniers, les 10 tourterelles 5
» deniers, et les 11 colombes 22 deniers ; on a ainsi 30
» oiseaux pour 30 deniers. »

De eodem (p. 45).

Mêmes données; mais 30 est remplacé par 29; il trouve deux solutions:

Colombes	11,	Tourterelles	6,	Moineaux	12
—	10	—	16	—	3.

Item de avibus (p. 46).

Mêmes données; mais 30 est remplacé par 15; il démontre que la solution n'est possible que pour un nombre fractionnaire d'oiseaux, savoir : colombes $5\frac{1}{2}$, tourterelles 5, moineaux $4\frac{1}{2}$.

Mais si l'on veut avoir quinze oiseaux pour 16 deniers, on a des nombres entiers.

Il a encore deux autres questions sur les oiseaux, qu'il ramène toujours à partager un nombre entier en parties divisibles chacune par un nombre donné, et la somme des quotients ne doit pas surpasser un nombre donné; mais il ne donne pas de règle pour opérer une telle décomposition et il finit par ces paroles: *Et sic possumus in similibus etiam in consolamine monetarum et bizantiorum operari, quod quandoque placuerit Dominationi Vestre liquidius declarabo.*

De compositione pentagoni equaliter in triangulum equicrurium datum (p. 49).

C'est la solution d'un problème de géométrie, que Léonard dit avoir trouvée depuis peu (*nuper*) et qu'il soumet à la correction de maître Théodore.

Un triangle isocèle abc est donné,

$$ab = ac = 10\,, \quad bc = 12\,;$$

alors la hauteur $ah = 8$; il s'agit de trouver sur ab un point d, sur ac un point g, et sur bc deux points e, f tels, que le pentagone $adefga$ soit équilatéral. Des points dg supposés trouvés, on abaisse sur la base bc les perpendiculaires di, gl. Il prouve que les deux triangles dei, gfl sont

égaux. Il prend pour *chose* la longueur d'un côté du pentagone et trouve successivement

$$bd = 10x, \quad di = \frac{4}{5}(10 - x) = 8 - \frac{4}{5}x,$$

$$bi = \frac{3}{5}(10 - x) = 6 - \frac{3}{5}x, \quad ei = \frac{1}{10}x.$$

Le triangle rectangle *dei* donne l'équation

$$\frac{7}{20}x^2 + 12\frac{4}{5}x = 64.$$

Il multiplie par $2\frac{6}{7}$, et il obtient

$$x^2 + 36\frac{4}{7}x = 182\frac{6}{7}$$

x c'est *res*, x^2 *census*, et la quantité toute connu $182\frac{6}{7}$ est le *dragma*.

La question est ainsi réduite à une règle d'algèbre (*et sic reducta est questio ad unam ex regulis algebre*).

Il résout cette équation géométriquement de cette manière.

Concevons qu'on ait le carré *klmn*, dont chaque côté soit égal à la *chose* x; prolongeons les côtés opposés *kn*, *lm* de sorte qu'on ait

$$np = mo = 36\frac{4}{7};$$

l'aire du rectangle *klop* est

$$x\left(x + 36\frac{4}{7}\right),$$

donc l'aire de ce rectangle est $182\frac{6}{7}$, et cette aire est égale au produit de

$$kl.\ lo = lm\ .\ mo = 182\frac{6}{7}.$$

désignons par y le milieu de *mo*, on a donc

$$mq = 18\frac{2}{7}, \quad \overline{mq}^2 = 334\frac{18}{49}, \quad \overline{mq}^2 + lm.\ lo = lq^2 = 517\frac{11}{49}.$$

On a par approximation

$$lq = 22.\ 44'.\ 33''.15'''; \quad lq - mq = lm = x = 4.27'.24''.40'''.50^{\text{IV}}.$$

Il faut toujours se rappeler qu'en tout ceci Léonard, à l'instar des Arabes, *parle* algèbre, mais ne l'*écrit* pas, et ne pouvait pas l'écrire, n'ayant pas les signes qui composent l'alphabet algébrique. Selon l'exacte définition de Lagrange, l'algèbre est un calcul *par équations*. Les Arabes font un tel calcul, mais *discursivement*. Il y a même des géomètres modernes qui s'imaginent faire de la géométrie ancienne, *antiquorum modo*, en algébraïsant sans alphabet.

Il dit en terminant : *Inveni etiam his diebus alias solutiones super similibus questionibus.* L'algèbre appliquée à la géométrie remonte aux Arabes.

Modus alius solvendi similes questiones (p. 52).

L'auteur revient aux questions numériques, dont la première roule sur cinq hommes ayant des nombres de *deniers* (*denari*), qu'il faut deviner à l'aide des données suivantes :

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 12,$$

$$x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 15,$$

$$x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 18,$$

$$x_4 + \frac{1}{5}x_5 = 20,$$

$$x_5 + \frac{1}{6}x_1 = 23,$$

Il prescrit un procédé qu'on peut généraliser ainsi. Soient les équations écrites *circulairement*

$$\begin{aligned}
ax_1 + bx_2 &= c\,, \\
a_1x_2 + b_1x_3 &= c_1\,, \\
a_2x_3 + b_2x_4 &= c_2\,, \\
a_3x_4 + b_3x_5 &= c_3\,, \\
a_4x_5 + b_4x_1 &= c_4\,,
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}x_2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}x_3$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{c_2}{a_2} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}x_4$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{c_2}{a_2} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{c_3}{a_3} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}x_5$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{c_2}{a_2} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{c_3}{a_3}$$

$$+ \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}\frac{c_4}{a_4} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}\frac{b_4}{a_4}x_1$$

$$x_1\,[a\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4 + b\,b_1\,b_2\,b_3\,b_4] = a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,c - a_2a_3a_4bc_1$$

$$+ a_3\,a_4\,bb_1\,c_2 - a_4\,bb_1\,b_2\,c_3 + bb_1\,b_2\,b_3\,c_4\,.$$

De là par *circulation*, on déduit x_2, x_3, x_4, x_5.

Le procédé indiqué par Léonard revient à la formation des divers termes a_1, a_2, a_3, a_4, c, etc.

On trouve

$$x_1 = 6\,\frac{612}{721},\quad x_2 = 10\,\frac{218}{721},\quad x_3 = 14\,\frac{43}{721}\,,$$

$$x_4 = 15\,\frac{453}{721},\quad x_5 = 21\,\frac{619}{721}\,.$$

Léonard décompose chaque fraction en deux autres ayant pour dénominateur 7 et 103; ses résultats sont fautifs.

Par exemple, on trouve

$$x_1 = \frac{4938}{721} = 6\,\frac{612}{721}, \text{ et il écrit } x_1 = 6 + \frac{3}{7} + \frac{87}{103},$$

ce qui est faux.

Investigatio unde procedat inventio suprascripta (p. 54).

L'auteur offre de dire à maître Théodore d'où provient l'invention précédente. (*Et si unde talis inventio procedat habere volueritis, vobis illud, tanquam domino venerando mittere procurabo*).

C'est ici la fin de la deuxième partie du *Flos*. Dans ces deux parties, Léonard traite principalement de la résolution de *certaines* équations du premier degré. Partout il montre beaucoup de finesse et d'habileté, et l'on voit qu'il possédait virtuellement les formules cramériennes : n' oublions pas que nous sommes au commencement du XIII.e siècle.

Incipit liber Quadratorum compositus a Leonardo Pisano, anno MCCXXV (p. 55).

Nous avons déjà vu que c'est une question proposée par Jean de Palerme qui a engagé Fibonacci à composer le Traité des Carrés dédié à l'empereur Frédéric II. C'est le monument arithmologique le plus précieux que nous ait transmis le moyen-âge, et où l'auteur, successeur de Diophante et des Arabes, se montre esprit indépendant, original, créateur et digne précurseur de Fermat, ou plutôt du XIIIe siècle il faut descendre jusqu' au XVIIe pour rencontrer dans Fermat un second Fibonacci.

Dans tout le cours de cet écrit, il s'appuie sur ces deux propriétés : La somme de la suite naturelle des nombres impairs est un carré; la différence des deux carrés impairs consécutifs est un multiple de 8.

Il débute ainsi: *Consideravi super originem omnium quadratorum numerorum, et inveni ipsam egredi ex ordinata imparium ascensione.*

De là il conclut qu'étant donné un carré, on peut trouver un second carré qui joint au premier fasse encore un carré. Si le carré est impair, par exemple 9, on fait la somme des nombres impairs qui précèdent 9; on a

$$16 \text{ et } 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Si le nombre est pair, par exemple 36, on cherche les deux nombres impairs consécutifs dont la somme est 36, ce sont 17 et 19; faisant la somme de tous les nombres impairs de 1 à 15, on obtient 64, et $6^2 + 8^2 = 10^2$, et 110 est la somme des nombres impairs de 1 à 19.

Ad inveniendos plures quadratos numeros (p. 57).

Maintenant on peut trouver tant de carrés qu'on veut, dont la somme soit un carré, par exemple, si l'on demande cinq carrés, le premier étant 9 et dont la somme soit un carré. Il trouve

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + 3612^2 = 3613^2.$$

En général si la somme de n nombres impairs consécutifs donne un carré, on a un moyen de trouver un second carré qui joint a ce carré donne un carré. Pour trouver ces n nombres, il suffit d'avoir un carré impair divisible par n.

Autre moyen. Si $2a + 1$ est un carré, $8a + 4$ sera aussi un carré; mais $4a^2 + 8a + 4$ est un carré: donc, etc.

Il démontre par la géométrie que

$$(a + 1)^2 - a^2 = (a + 1) + a,$$

et

$$(a + b)^2 - a^2 = b(a + b), \ (m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2 = 4m^2n^2.$$

Pour ce dernier théorème, il imite la construction d'Euclide, livre X., prémier lemme rélatif à la proposition 30. Il est fort singulier que ce lemme n'est jamais cité quand il s'agit du théorème numérique de Pythagore; il contient pour-

tant la solution générale du problème, et cela parait avoir échappé à tout le monde, excepté à Fibonacci.

Il démontre encore graphiquement d'une manière très-ingénieuse que le terme sommatoire de la suite des nombres impairs est toujours un carré, et la démonstration est fondée en principe sur ce que

$$(n+1)^2 - n^2 = \Delta n^2 = 2n+1\,;$$

d'où

$$n^2 = \Sigma(2n+1).$$

Problème (p. 66). Étant donné un carré égal à la somme de deux carrés, décomposer ce carré encore d' une autre manière en somme de deux carrés.

Le procédé graphique revient à ceci.

Soit

$$a^2+b^2=c^2\,,\quad d^2+e^2=f^2\,;$$

alors

$$\left(\frac{dc}{f}\right)^2+\left(\frac{ec}{f}\right)^2=c^2.$$

Proposition. Si quatre nombres a, b, c, d, ne sont pas en proportion, et si a^2+b^2 et c^2+d^2 ne sont pas des carrés, on peut décomposer le produit $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ de deux manières en somme de deux carrés, savoir

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Si a^2+b^2 est un carré, il y a évidemment encore une troisième décomposition, et une quatrième lorsque c^2+d^2 est aussi un carré.

Léonard démontre parfaitement cette importante proposition qui lui appartient, selon l'observation de M. Woepcke (*Journal de Math.* t. XX., 1855.) Diophante peut avoir connu cette propriété, mais ne l'a pas énoncée, et la démonstration, sourtout par la méthode graphique, n'est pas facile. Le nom de Fibonacci doit rester attaché à ce théorème.

A la page, 73 il donne l'equivalent de la formule

$$(b^2 - a^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

A la page 74,

$$a^2 + b^2 = c,$$
$$m^2 + n^2 = p^2,$$
$$cp^2 = r^2 + s^2,$$
$$\left(\frac{r}{p}\right)^2 + \left(\frac{s}{p}\right)^2 = c.$$

Page 76. *Somme des carrés de la suite naturelle des nombres.* Il la trouve d'après ce résultat du calcul aux différences

$$n(n + 1)(2n + 1) - (n - 1).\ n.\ 2n - 1$$
$$= \Delta.\ n.\ n + 1.\ 2n + 1 = 6n^2\ ;$$

d'où

$$\frac{n\,(n + 1)(2n + 1)}{6} = \Sigma n^2.$$

Page 78. *Somme des carrés de la suite naturelle des nombres impairs.*

D'après le résultat

$$\Delta.\ 2n + 1.\ 2n + 3.\ 4n + 4 = 12(2n + 1),$$

d'où

$$\Sigma\,(2n + 1)^2 = \frac{2n + 1.2n + 3.24n + 4}{12}.$$

Il indique de même la somme des carrés des nombres pairs et des nombres ternaires, etc., toujours en présentant les nombres par des lignes et opérant sur ces lignes comme nous sur les *lettres*. C'est Viète qui a remplacé ces lignes par des *lettres*.

Le problème suivant étant le plus important de ce Traité des carrés, nous allons le donner presque textuellement. Il est précedé de ces deux propositions qui font office de lemme.

Lemme I. Lorsque p et q sont deux nombres premiers,

$$\frac{pq(p+q)(p-q)}{24}$$

est toujours un nombre entier, et lorsque p et q sont deux nombres quelconques,

$$\frac{4pq(p+q)(p-q)}{24}$$

est un nombre entier.

Le produit

$$4pq(p+q)(p-q)$$

se nomme *congru*. Nous verrons la raison de cette dénomination.

Lemme II. b étant simultanément moyenne arithmétique entre a_1 et a_{n+2}, entre a_2 et a_{n+3} entre a_3 et a_{n+3} etc. , entre a_n et a_{2n}, la somme des $2n$ nombres a_1 a_2, ... , a_{2n} est égale à $2nb$. Si $b=2n$, la somme des $2n$ nombres est un carré.

Problème. Trouver trois carrés et un nombres tel, qu' en ajoutant ce nombre au plus petit de ces carrés, on trouve le carré moyen, et qu' en ajoutant ce nombre au carré moyen, on trouve le plus grand carré.

Solution. Nous suivons la marche de Fibonacci, mais en prenant des *lettres* au lieu de *lignes*.

Soient a et b deux nombres *impairs consécutifs*, de sorte que $b=a+2$, $a+b=2a+2$: il s'agit de trouver une suite de nombres impairs consécutifs telle, qu'on puisse la décomposer en deux suites de même somme, et que le nombre de termes de la même suite soit au nombre des termes de la seconde comme $a:b$. Sit la suite des nombres impairs consécutifs

(A) $\quad 2a^2-3,\ 2a^2-1,\ 2a^2+4a+3,$

elle renferme $2a+4$ termes.

La moyenne arithmétique entre le premier et le dernier, le deuxième et l'avant-dernier etc., est $2a(a+1)$; alors d'après le lemme II, la somme est

$$4a(a+1)(a+2)=c,$$

nombre *congru*, en faisant $p=a+2$, $q=a$.

Soit la seconde suite

(B) $2a^2+4a+5$, $2a^2+4a+7$, . . . , $2a^2+8a+3$.

Cette suite renferme $2a$ termes. La moyenne arithmétique est

$$2a^2+6a+4=2(a+1)(a+2),$$

et la somme est

$$4a(a+1)(a+2),$$

nombre congru. Par conséquent, les deux suites (A) et (B) remplissent les deux conditions énoncées ci-dessus.

Complétant la suite (A) en descendant jusqu'à l' unité, la somme de 1 à $2a^2-5$ est égale à $(a^2-2)^2$; la somme de 1 à $2a^2+4a+3$ est $(a^2+2a+2)^2$; donc

$$(a^2-2)^2+c=(a^2+2a+2)^2.$$

Opérant de même sorte sur la suite (B), la somme de 1 à $2a^2+4a+3$ est $(a^2+2a+2)^2$; la somme de 1 à $2a^2+8a+3$ est $(a^2+4a+2)^2$; et

$$(a^2+2a+2)^2+c=(a^2+4a+2)^2.$$

Le problème est donc résolu. Les trois carrés sont: le petit carré $(a^2-2)^2$, le moyen carré $(a^2+2a+2)^2$, et le grand carré $(a^2+4a+2)^2$, et le nombre à adjondre est

$$c=4a(a+1)(a+2);$$

on l'appelle *congru* parce qu'il convient à ces trois carrés, qui sont *congruents*.

Fibonacci prend $a=2$, alors on a $c=240$, et

$$7^2+240=17^2,\ 17^2-240=7^2$$
$$17^2+240=23^2,\ 23^2+240=17^2.$$

Fibonacci se servant de lignes est obligé d'entrer dans des longues discussions amenées pour les cas où $a = 1$ et $a^2 - 2$ devient négatif, et dans des cas fractionnaires il a bésoin du premier lemme.

Au moyen de signes littéraux, cette discussion est inutile, et l'on a en général (Boncompagni *Annali di scienze matematiche*, Aprile 1855) :

$$c = 4mn(m + n)(m - n),$$

$$x = m^2 + n^2,$$

$$y = (m + n)^2 - 2n^2,$$

$$z = (m + n)^2 - 2m^2,$$

$$z^2 + c = x^2,$$

$$x^2 + c = y^2.$$

Hec questio predicta in prologo huius libri (pag. 96).

Cette question, proposée par Jean de Palerme, est, comme nous l'avons vu, de satisfaire aux équations

$$x^2 + 5 = y^2,$$
$$y^2 + 5 = z^2;$$

y est le nombre cherché. Multipliant les deux équations par v^2, on a

$$x^2v^2 + 5v^2 = y^2v^2; \quad y^2v^2 + 5v^2 = z^2v^2.$$

Cherchons un nombre congru de la forme $5v^2$, il suffit de prendre dans les formules précédentes $m=5$, $n = 4$; alors

$$c = 720, \frac{c}{5} = 12^2 = v^2, \; v^2x^2 = 31^2,$$

$$v^2y^2 = 41^2, \quad v^2z^2 = 49^2;$$

d'où

$$y = \frac{41}{12} = 3\,\frac{5}{12}.$$

(Page 98.) Un carré ne peut-être un nombre *congru*.

Il établit comme lemme qu'on ne peut avoir

$$m(m-n)=n(m+n),$$

ou bien

$$m^2=n^2+2mn;$$

on aurait

$$2m^2=(m+n)^2;\ \left(\frac{m+n}{m}\right)^2=2;$$

ce qui est impossible en nombres rationnels.

Donc $mn\,(m+n)(m-n)$ ne peut devenir un carré. Mais il faudrait encore démontrer qu'on ne peut avoir

$$mn=m^2-n^2,$$

ce qui est d'ailleurs facile, car on aurait

$$4m^2-4mn+n^2=5n^2\left(\frac{2m-n}{m}\right)^2=5;$$

impossible. On ne peut donc avoir simultanément

$$x^2+c^2=y^2,\quad x^2-c^2=y^2;$$

mais la démonstration n' est pas complète. Il faut encore prouver:

1.° Que m, n, $m+n$, $m-n$ ne sont pas des carrés simultanément.

2.° Que m, n, m^2-n^2 ne peuvent être des carrés. Cela ne peut se démontrer que par le theorème de Fermat sur les bi-carrés, auxquels Fibonacci n'a nullement pensé; on a eu tort de lui en attribuer la connaissance.

(Page 100.) *Problème.* Satisfaire aux équations

$$x^2-x=y^2$$
$$x^2+x=z^2.$$

Solution. Soit c un nombre congru aux trois carrés u^2, v^3, t^2, de sorte que l'on ait

$$u^2 + c = v^2,$$
$$u^2 - c = t^2,$$

de là

$$u^4 + cu^2 = v^2u^2,$$
$$u^4 - cu^2 = t^2u^2,$$
$$\left(\frac{u^2}{c}\right)^2 + \frac{u^2}{c} = \left(\frac{vu}{c}\right)^2,$$
$$\left(\frac{u^2}{c}\right)^2 - \frac{u^2}{c} = \left(\frac{tu}{c}\right)^2;$$

on a donc

$$x = \frac{4}{c}, \quad y = \frac{vu}{c}, \quad z = \frac{tu}{c}.$$

(Page 100.) *Problème.* Satisfaire aux équations

$$x^2 + mx = y^2,$$
$$x^2 - mx = z^2.$$

Solution.

$$\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{x}{m} = \frac{y^2}{m^2},$$
$$\left(\frac{x}{m}\right)^2 - \frac{x}{m} = \frac{z^2}{m^2},$$

ce qui revient au problème précédent.

Théorème. Si l'on a trois carrés impairs consécutifs A, B, C, on a

$$C - B - (B - A) = 8;$$

de même si les carrés sont pairs et consécutifs. D'où l'on conclut que les différences entre les carrés impairs consécutifs donnent la progression 8, 16, 24, 32, etc., et les différences entre les carrés pairs forment la progression 12, 20, 28, 36 etc.

Il emploie ce théorème comme lemme pour résoudre l'é-

quation

$$\frac{x^2 - y^2}{z^2 - x^2} = \frac{a}{b}.$$

Si

$$b = a + 1,$$

on a

$$x = 2a + 1, \quad y = 2a - 1, \quad z = 2a + 3.$$

Si

$$a = 2n + 1, \quad b = 2n + 3,$$

on a

$$x = 2n + 2, \quad y = 2n, \quad z = 2n + n.$$

Faisons généralement

$$x = m + n, \quad y = m, \quad z = m + 2n,$$

on a

$$\frac{x^2 - y^2}{z^2 - x^2} = \frac{2m + n}{2m + 3n} = \frac{a}{b}, \; 2m(b - a) = n(3a - b),$$

équation à laquelle on peut satisfaire d'une infinité de manières.

Un troisième cas particulier est celui

$$a = p^2, \quad b = q^2,$$

alors

$$x = q^2, \quad y = pq, \quad z = p^2.$$

La solution générale de Fibonacci se ramène à ceci:

Soient A_n, $A_{n'}$, $A_{n''}$ trois termes de la suite naturelle des carrés des nombres impairs, les n indiquant les rangs.

On a d'après le théorème rapporté ci-dessus,

$$A_{n'} - A_n = 4(n' - n)(n + n' - 1),$$
$$A_{n''} - A_{n'} = 4(n'' - n')(n' + n'' - 1)$$

on doit donc satisfaire à l'équation

$$b(n' - n)(n + n' - 1) = a(n'' - n')(n' + n'' - 1).$$

Exemple I:

$$b = 9 : a = 2,$$

il prend $n = 4$; alors

$$n' = 5, \quad n'' = 8,$$

satisfont à l'équation

$$A_4 = 49, \ A_5 = 81, \ A_8 = 225, \ \frac{81-49}{225-81} = \frac{32}{144} = \frac{2}{9}.$$

Fibonacci fait observer que les solutions fractionnaires de l'équation

$$\frac{x^2-y^2}{z^2-x^2} = \frac{a}{b}$$

donnent aussi des solutions en nombres entiers, car on a

$$\frac{p^2x^2 - p^2y^2}{p^2z^2 - p^2x^2} = \frac{a}{b}.$$

Exemple II:

$$b = 43, \quad a = 11,$$

il trouve

$$n = 3, \quad n' = 14, \quad n'' = 30.$$

Fibonacci parvient à ces diverses valeurs par tâtonnements: Il y a une méthode de solution générale très-simple, très directe, déjà employée par Diophante pour le cas particulier $a=1$, $b=3$ (Diophante, t. II, prob. 20). Mais Fibonacci ne connaissait probablement pas Diophante qu' il ne cite jamais. D' ailleurs il ne cite qu'Euclide. A-t-il connu Alkarki ? c'est fort douteux. Il résout ensuite ce problème qui ne présente aucune difficulté (p. 112):

$$x^2 + y^2 = u^2$$
$$x^4 + y^2 + z^2 = v^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = w^2$$

. . . .

Questio mihi proposita a Magistro Theodoro, Domini Imperatoris phylosopho (p. 114).

$$x + y + z + x^2 = u^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 = v^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = w^2.$$

C'est la dernière question; le manuscrit est malheureusement interrompu au *verso* de la feuille 39 ; de sorte qu'on n'a pas la solution complète. Elle a été restaurée et généralisée dans un beau travail de M. Genocchi que nous donnerons dans ce journal. Ce qui précède suffit pour justifier la haute importance historique, qu'on doit attacher à la couverte du prince Boncompagni. On trouve on outre dans dé l'ouvrage cité ci-dessus (*Intorno ad alcune opere etc.*), des renseignements curieux sur divers personnages. Antonio de'Mazzinghi da Peretola (vers 1350), Dagomari Paulo dell'Abbaco (XIV.ᵉ siècle), Jean dell'Abbaco, Antoine Corbinelli (XV.ᵉ siècle), probablement de la famille de l'ami de madame de Sévigné , et plusieurs autres. C' est un ouvrage à consulter pour les biographes et bibliographes.

SULLA DIREZIONE DEGLI AEROSTATI.

MEMORIA

DELL' INGEGNERE CARLO GABUSSI.

§. 1. L'invenzione degli Aerostati che ebbe luogo al finire dello scorso secolo, risvegliò le più grandi speranze circa la possibilità di percorrere con rapidità ed agevolezza l'atmosfera che ne circonda. Dopo la scoperta di Mongolfier sull'innalzamento dei globi mediante l'aria rarefatta, il perfezionamento arrecato dall'applicazione dell'idrogene al riempimento dei medesimi, e le ascensioni in gran numero verificatesi, sembrava agevole la transizione alla scoperta di un meccanismo che applicato al sistema sollevatosi nell'atmosfera, gl'imprimesse in una data direzione una velocità considerevole. Tutte queste speranze non tardarono però a cadere, ed in oggi la possibilità di dirigere gli Aerostati è riconosciuta essere una utopia, per la difficoltà d'innalzare una forza motrice considerevole e di peso invariabile in un fluido così rado come l'aria, superando con essa le correnti fortissime che percorrono gli spazii atmosferici.

Diffatti l'Accedemia delle Scienze di Parigi interrogata fin dal Febbraio 1784 da un ministro per nome De Breteuil sull'utilità degli Aerostati e sul loro perfezionamento, ebbe a rispondere : 1.° Che gl'inviluppi ordinarii, allora in uso, non erano atti a sostenere la tensione dell'idrogene quando venisse fortemente riscaldato dai raggi solari. 2.° Che il metodo di gettar zavorra che non può ricuperarsi, non permette di alzarsi ed abbassarsi indefinitamente a volontà dell'aeronauta. 3.° Che l'unica forza motrice applicabile alla direzione dei medesimi essendo quella dell'uomo, il peso di questo motore, molto considerevole a fronte dell'aria, obbligava ad assegnare forti dimensioni all' apparecchio elevatore , per cui molto rilevante facevasi la resistenza che

s'incontra nell'indirizzarlo a traverso la massa aerea. 4.° Che l'allungamento orizzontale dell'Aerostato col quale speravasi di ovviare in massima parte all' ostacolo che incontrasi nel fender l'atmosfera , non deve oltrepassare due o al più tre volte il suo diametro verticale. 5.° Che il miglior modo in fine di valersi degli Aerostati consiste, dopo studiata la direzione dei venti a differenti altezze sulla superficie del globo, nell'innalzarsi od abbassarsi fino a che s'incontrino quelle correnti che favoriscono il moto nella direzione prefissa. Ciononostante riconobbe quell' Accademia delle Scienze il vantaggio che ritraesi dall'ottenere un moto indipendente delle correnti atmosferiche sia per isceglierè il punto di discesa, sia per percorrere un mediocre spazio in un'Atmosfera tranquilla; anzi fecesi essa a redigere due progetti, il primo per una macchina capace di portare 30 uomini; l'altro per trasportarne 6.

Fino ad ora nulla è sopravvenuto che infermi radicalmente il giudizio arrecato da quel consesso scientifico sul moto di traslazione, e tutte le invenzioni più o meno ingegnose gli esperimenti effettuatisi nell'epoca attuale, se addimostrano la facilità del moto verticale, additano ancora l'insufficienza dei mezzi onde taluno pretese valersi a dirigere un Aerostato nelle regioni aeree.

Nel gran numero d'invenzioni che sorsero onde risolvere il problema del moto orizzontale, una ve n'ha che merita menzione per aver fornito soggetto di studio teorico al prof. Magistrini di Bologna, e di esperimento pratico al defunto Principe Luigi Bonaparte. Il meccanismo di cui discorro consiste nella rotazione delle superficie elicoidali attorno ad un asse, il qual motore così prosperamente applicato in oggi alla navigazione comune, fino dal 1823 forniva argomento al Magistrini d'una memoria inserita negli atti della Società Italiana di Modena, mentre il Principe Bonaparte verificava

dal suo lato sperimentalmente l'efficacia di questo propulsore nell'indirizzare un globo nell'aria.

Il Magistrini sottopose a calcolo nella sua memoria l'effetto prodotto da un peso che discendendo nell' Atmosfera pone in rotazione un sistema di quattro coclee munite ciascuna di quattro superficie elicoidali formate da delle stoffe flessibili. La rotazione prodotta dal peso discendente genera una pressione sull'aria nel senso dell'asse della coclee, le quali per la reazione dello stesso fluido sono costrette a progredire con moto di traslazione seco strascinando tutto il sistema. Giunto il peso al termine della sua corsa, supponsi che il volatore lo rimonti, e poscia lo lasci di nuovo discendere, e così indefinitamente. Esaminate le leggi del moto, vario dapprima e poi costante al termine di ogni periodo di alternativa discesa ed ascesa, applicò il Magistrini le formule ottenute ad un caso pratico. Suppose cioè che il globo sferico contenente l'idrogene avesse m. 9,03 di diametro; che il peso motore fosse kilogr. 32, 57; la lunghezza della discesa m. 3,00; il tempo per rimontarlo 75''; il peso totale del sistema kil. 890, 47. Ridotto il moto all' uniformità, dopo ciascun periodo di $83''\frac{1}{3}$, trovò che il viaggio orizzontale è di m. 826 circa, all'ora. Siccome la quantità d'azione sviluppata dal motore è minore di 98 kilogrammetri negli $83''\frac{1}{3}$, è evidente che l'effetto ottenuto non poteva essere che meschino, come infatti risulta. Inoltre l'influenza del moto progressivo del sistema sulla resistenza dell'aria alla rotazione delle coclee, essendo stata valutata in modo che non parmi consentaneo colle leggi della Meccanica, mi è sembrato a proposito di riprendere il problema, supponendo che il sistema sia capace di innalzare un certo numero d'uomini, i quali vengano applicati mediante delle manovelle, ed un semplice meccanismo alla rotazione delle coclee; rintracciando dipoi mediante le

note leggi della meccanica quale effetto utile se ne possa ritrarre. Da questo caso particolare potrà poi dedursi notizia circa la possibilità del problema generalmente considerato.

In questa ricerca ho supposto che diasi all'elevatore una forma differente dalla sferica che è poco acconcia ad attraversare un fluido; ma mi sono rinchiuso dentro i limiti dell'allungamento prescritti dall'Accademia di Parigi nell'indagine per essa fatta, come ho superiormente indicato. La maggior incertezza proviene dal valutare il coefficiente di resistenza dell'aria, sia al moto progressivo del sistema, sia alla rotazione delle elicoidi. Pel secondo, ho seguita l'ipotesi del Magistrini; quanto al primo osserverò che se per le necessità della navigazione ordinaria vennero istituite numerose esperienze sopra galleggianti o corpi immersi di differenti forme, affine di conoscere la resistenza che oppongono al moto dentro l'acqua, altrettanto non può dirsi del fluido aereo, e tanto meno si rintracciò la forma da assegnarsi alla prua d'un Aerostato, onde esso incontri il minimo ostacolo nel moto di traslazione. Fui perciò indotto, dopo fissata la configurazione che mi sembrò convenevole, a determinare due limiti, uno maggiore, l'altro minore pel coefficiente di questa resistenza, ed a calcolare i risultati ottenuti in entrambe queste ipotesi, fra i quali sarà racchiuso quello che può conseguirsi.

§. 2. Ciò posto denomino

$P' =$ Kil. 1500 peso da innalzare detrattone l'idrogene.

M massa del sistema, compresovi l'idrogene.

$g = 9,8088$ gravità.

$t = 12°$ temperatura dell'atmosfera supposta invariabile fino all'altezza d'equilibrio $= 400^m$.

$p =$ Kil. 1,24316 peso d'un m.° c.° d'aria a livello del mare, e $0.^m 76$ di pressione.

p' id. id. all'altezza di 400^m = Kil. 1, 21748.

p'' id. id. del m.° c.° d' idrogene a 12° e 0.^{m} 76 di pressione = Kil. 0, 08572.

ε eccesso della pressione dell'idrogene su quello dell' aria a 400^m c. s. = 0,^{m} 02 d'acqua.

V volume dell'elevatore.

$\frac{V}{n'}$ id. dell'idrogene suddetto che si adopra per la carica.

h elasticità dell'aria a livello del mare = 10,^{m} 33 d' acqua.

h' id. id. all'altezza di 400.^{m}

h'' id. dell'idrogene id. id.

P_1 peso del m.° c.° d'idrogene all'altezza d'equilibrio.

Δ differenza di peso dei due fluidi id. id.

$n = 4$ numero delle superficie elicoidali motrici.

ρ raggio di due puleggie montate sull'albero delle superficie elicoidali che ricevono l' azione della forza motrice.

F quantità d'azione della forza motrice in 1.″

F′ id. id. id. misurata alla circonferenza delle puleggie suddette.

P resistenza dell'aria al moto rotatorio d'un'ala misurata c. s.

v velocità della circonferenza di queste puleggie al tempo t.

$\omega = \frac{v}{\rho}$ velocità angolare di rotazione id. id.

S momento d'inerzia delle masse rotanti.

u velocità di progressione del sistema al tempo t.

x, y, z coordinate rettangolari d' un elemento della superficie elicoidale riferite all'asse X di rotazione e ad un piano perpendicolare all'estremità del medesimo.

φ angolo dell' elemento superficiale coll' asse di rotazione.

$\gamma = \frac{p'}{2g}$ resistenza dell'aria all'altezza d'equilibrio per la superficie 1 e la velocità 1.

a raggio del cilindro interno su cui si ravvolge la superficie elicoidale.

$l + a$ id. id. esterno che la circoscrive.

f angolo dell'elica direttrice del cilindro interno coll' asse di rotazione.

m passo dell'elica suddetta.

2L lunghezza totale delle superficie motrici, misurata sull'asse di rotazione.

H resistenza dell'aria al moto di traslazione del sistema per la velocità $u = 1$.

Si ha dapprima per l'aria

$$h' = \frac{1,21748}{1,24316} h = 0,97934.h ;$$

per l'idrogene

$$h'' = h \frac{V}{n'V} = \frac{h}{n'}$$

per cui

$$\frac{h}{n'} = 0,97934. h + \varepsilon$$

e sostituendo per h ed ε

$$n' = 1,019.$$

Poscia

$$P_1 = \frac{p''}{n'} = \frac{0,08572}{1,019} = 0,08411.$$

$$\Delta = p' - P_1 = 1,13337.$$

$$V = \frac{P'}{\Delta} = \frac{1500}{1,13337} = 1323,49 .$$

Ora ritenendo le denominazioni fatte, calcolo il valore di P. Sarà

$$\frac{v}{\rho}\sqrt{(y^2+z^2)}$$

la velocità di rotazione dopo il tempo t di un elemento situato alla distanza $\sqrt{(y^2+z^2)}$ dall' asse delle superficie elicoidali.

$$\frac{v}{\rho}\sqrt{(y^2+z^2)}.\cos\varphi$$

velocità con cui l'elemento incontra l'aria per effetto del moto di rotazione.

$$\frac{v}{\rho}\sqrt{(y^2+z^2)}.\cos\varphi-u\,\text{sen}\,\varphi$$

velocità con cui l'elemento urta l'aria tenendo conto anche del moto di traslazione del sistema.

$$\gamma\left(\frac{v}{\rho}\sqrt{(y^2+z^2)}.\cos\varphi-u\,\text{sen}\,\varphi\right)^2$$

resistenza dell'aria sull'unità di superficie al moto di rotazione.

$$\gamma\,\text{sen}\,\varphi\left(\frac{v}{\rho}\sqrt{(y^2+z^2)}.\cos\varphi-u\,\text{sen}\,\varphi\right)^2$$

componente di questa resistenza nel senso del moto di traslazione, ovvero dell'asse di rotazione.

$$\gamma\cos\varphi\left(\frac{v}{\rho}\sqrt{(y^2+z^2)}.\cos\varphi-u\,\text{sen}\,\varphi\right)^2$$

componente della stessa resistenza perpendicolare all' asse. Inoltre essendo

$$z=y\,\text{tang.}\frac{x\,\text{tang.}f}{a}$$

l'equazione della superficie elicoidale, sarà l'area dell'ele-

mento

$$\frac{dx dy \sqrt{\left(\cos^2 \frac{x \,\mathrm{tang.} f}{a} + \frac{y^2 \mathrm{tang.}^2 f}{a^2}\right)}}{\cos^2 \frac{x \,\mathrm{tang.} f}{a}}$$

$$\mathrm{sen}\, \varphi = \frac{y \,\mathrm{tang.} f}{a \sqrt{\left(\cos^2 \frac{x \,\mathrm{tang.} f}{a} + \frac{y^2 \,\mathrm{tang}^2 f}{a^2}\right)}};$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos. \frac{x \,\mathrm{tang.} f}{a}}{\sqrt{\left(\cos^2 \frac{x \,\mathrm{tang.} f}{a} + \frac{y^2 \mathrm{tang}^2 f}{a^2}\right)}}$$

per cui si ha

$$\gamma. \frac{\mathrm{tang.} f. y. dx dy}{a \cos^2 \frac{x. \mathrm{tang.} f}{a}} \left(\frac{v}{\rho} \sqrt{(y^2 + z^2)}. \cos \varphi - u \,\mathrm{sen} \varphi\right)^2$$

per la resistenza dell'elemento nel senso del moto rettilineo;

$$\gamma \frac{dx dy}{\cos \frac{x \,\mathrm{tang.} f}{a}} \left(\frac{v}{\rho} \sqrt{(y^2 + z^2)}. \cos \varphi - u \,\mathrm{sen}\, \varphi\right)^2$$

per la resistenza dell'elemento perpendicolare all'asse. Sostituendo di nuovo per senφ e cosφ i valori trovati, per $\sqrt{(y^2 + z^2)}$ l'espressione $\frac{y}{\cos \frac{x \,\mathrm{tang.} f}{a}}$ dedotta dall'equazione della superficie, ed infine per $\frac{\mathrm{tang.} f}{a}$ il suo valore $\frac{2\pi}{m}$, si avrà

$$\gamma. \frac{2\pi}{m} \frac{y^3 dx dy}{\cos.^2 \frac{2\pi x}{m} \left(\cos^2 \frac{2\pi x}{m} + \frac{4\pi^2}{m^2} y^2\right)} \left(\frac{v}{\rho} - \frac{2\pi u}{m}\right)^2$$

Per la componente della resistenza parallela all'asse.

$$\gamma \frac{y^2 dx dy}{\cos\frac{2\pi x}{m}\left(\cos^2\frac{2\pi x}{m}+\frac{4\pi^2}{m^2}y^2\right)}\left(\frac{v}{\rho}-\frac{2\pi u}{m}\right)^2$$

Per la componente perpendicolare all'asse.

Il momento di questa componente è

$$\gamma . \frac{y^2\sqrt{(y^2+z^2)}dx dy}{\cos\frac{2\pi x}{m}\left(\cos^2\frac{2\pi x}{m}+\frac{4\pi^2}{m^2}y^2\right)}\left(\frac{v}{\rho}-\frac{2\pi u}{m}\right)^2$$

$$=\gamma \frac{y^3 dx dy\left(\frac{v}{\rho}-\frac{2\pi u}{m}\right)^2}{\cos^2\frac{2\pi x}{m}\left(\cos^2\frac{2\pi x}{m}+\frac{4\pi^2}{m^2}y^2\right)}$$

e la componente medesima valutata alla circonferenza della puleggia di raggio ρ

$$\frac{\gamma}{\rho} \frac{y^3 dx dy\left(\frac{v}{\rho}-\frac{2\pi u}{m}\right)^2}{\cos^2\frac{2\pi x}{m}\left(\cos^2\frac{2\pi x}{m}+\frac{4\pi^2}{m^2}y^2\right)}.$$

Queste due componenti valutate per tutta l' estensione di un'ala, danno

$$\frac{2\pi\gamma}{m}\left(\frac{v}{\rho}-\frac{2\pi u}{m}\right)^2\iint\frac{y^3 dx dy}{\cos^2\frac{2\pi x}{m}\left(\cos^2\frac{2\pi x}{m}+\frac{4\pi^2}{m^2}y^2\right)}$$

$$\frac{\gamma}{\rho}\left(\frac{v}{\rho}-\frac{2\pi u}{m}\right)^2\iint\frac{y^3 dx dy}{\cos^2\frac{2\pi x}{m}\left(\cos^2\frac{2\pi x}{m}+\frac{4\pi^2}{m^2}y^2\right)}$$

integrali che debbono effettuarsi fra i due cilindri di raggio a e $l+a$ e per tutta la lunghezza $2L$ dell'ala.

Eseguendo si ha

$$\frac{\gamma L m}{2\pi}\left[(l+a)^2-a^2-\frac{m^2}{4\pi^2}\log\left(\frac{m^2+4\pi^2(l+a)^2}{m^2+4\pi^2a^2}\right)\right]\left(\frac{v^2}{\rho^2}-\frac{4\pi}{\rho m}uv+\frac{4\pi^2}{m^2}u^2\right)=(\mathrm{M})$$

per la componente della resistenza d'un'ala al moto rettilineo; e

$$\frac{\gamma L m^2}{4\pi^2\rho}\left[(l+a)^2-a^2-\frac{m^2}{4\pi^2}\log\left(\frac{m^2+4\pi^2(l+a)^2}{m^2+4\pi^2a^2}\right)\right]\left(\frac{v^2}{\rho^2}-\frac{4\pi}{\rho m}uv+\frac{4\pi^2}{m^2}u^2\right)=\mathrm{P}$$

per la resistenza al moto rotatorio valulata c. s. Si ha inoltre l'equazione

$$\mathrm{P}=\frac{m}{2\pi\rho}(\mathrm{M})$$

La quantità (M) può scriversi sotto la forma

$$(\mathrm{M})=\mathrm{R}v^2-\mathrm{R}'uv+\mathrm{R}''u^2$$

e la P diviene

$$\mathrm{P}=\frac{m}{2\pi\rho}(\mathrm{R}v^2-\mathrm{R}'uv+\mathrm{R}''u^2)$$

avvertendo che in entrambe queste espressioni deve verificarsi la condizione

$$\frac{v}{\rho}>\frac{2\pi u}{m}$$

affinchè la resistenza dell' aria alla rotazione si operi sul lato della superficie opposto al moto di traslazione.

§. 3. Ora suppongasi che la forza motrice sia applicata a delle manovelle montate attorno ad un albero secondo tre piani ad angolo di 120° fra di loro. L' albero porti due

ruote dentate le quali ingranino in due rocchetti, ciascuno dei quali ha un proprio albero che porta altresì una puleggia. Queste due puleggie mediante due funi perpetue pongano in moto quelle fissate sull'asse delle superficie elicoidali. Denomino

r' il raggio delle manovelle.

R' il raggio della circonferenza primitiva delle ruote dentate.

r il raggio della circonferenza primitiva dei rocchetti.

R il raggio delle puleggie montate sugli alberi dei rocchetti.

ρ il raggio delle puleggie montate sull'alberò elicoidi (c. s.)

n_1 numero dei denti d'una ruota dentata.

n'_1 numero dei denti d'un rocchetto.

v' velocità del gomito delle manovelle.

$v = \frac{R'}{r'} \; \frac{R}{r} \, v$ velocità della circonferenza di raggio ρ.

d . . . diametro dei perni deli'albero delle manovelle.

d_1 . . . diametri dei perni degli alberi dei rocchetti.

$_1d$ . . . diametri dei perni dell'albero elicoidi.

P . . . P_1 . . . $_1P$ . . . pressioni medie dei perni contro i cuscinetti.

f', f'', f''' coeffi. dell' attrito dei perni nei cuscinetti, dei denti degl' ingranaggi, e delle funi nelle gole delle puleggie.

$s = \rho\varphi$ arco abbracciato dalle funi perpetue in ciascuna puleggia dell'albero elicoidi.

Le quantità d'azione assorbite nell'istante dt dal meccanismo di trasmissione sono le seguenti.

Pei perni dell'albero delle manovelle

$$f'(Pd + \ldots .)\frac{v'}{2r'}\,dt\,.$$

Pei denti degl'ingranaggi

$$\frac{f''\pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)}{1+f''\pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)}\left(F-f'(Pd+\ldots)\frac{v'}{2r'}\right)dt.$$

Pei perni degli alberi dei rocchetti

$$f'\frac{R'}{r'}\frac{v'}{2r}(P_1d_1+\ldots)dt.$$

Per le funi perpetue

$$\frac{\dfrac{F-f'\dfrac{v'}{2r'}(Pd+\text{ec.})}{1+f''\pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)}-f'\dfrac{R'}{r'}\dfrac{v'}{2r}(P_1d_1\ \text{ec.})}{\left(e^{\frac{f'''s}{\rho}}-1\right)\left(1+\dfrac{1}{e^{\frac{f'''s}{\rho}}-1}\right)}dt.$$

Pei perni dell'albero superficie elicoidiche

$$f'\frac{R'}{r'}\frac{R}{r}\frac{v'}{2\rho}({}_1P_1d\ldots)dt\ ;$$

ed in totale

$$\Big\{ F.\frac{1+f''\pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)e^{\frac{f''s}{\rho}}}{\left[1+f''\pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)\right]\left(e^{\frac{f'''s}{\rho}}-1\right)\left(1+\frac{1}{e^{\frac{f'''s}{\rho}}-1}\right)}$$

$$+\frac{f'\,\frac{v'}{2r'}(\mathrm{P}d+\ldots)}{\left[1+f''\pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)\right]\left(1+\frac{1}{e^{\frac{f'''s}{\rho}}-1}\right)}+\frac{f'\,\frac{\mathrm{R}'}{r'}\,\frac{v'}{2r'}(\mathrm{P}_1d_1+\mathrm{ec.})}{1+\frac{1}{e^{\frac{f''s}{\rho}}+1}}$$

$$+f'\,\frac{\mathrm{R}'}{r'}\,\frac{\mathrm{R}}{r}\,\frac{v'}{2\rho}\,({}_1\mathrm{P}_1d\ldots)\Big\}.\,dt\,;$$

quantità che ha la forma

$$(\beta\mathrm{F}+\Pi'v')dt\;\ldots.\;(k)$$

e per essere v' proporzionale a v

$$dt(\beta\mathrm{F}+\Pi v).$$

Ora il principio delle forze vive dà l'equazione concernente il moto di rotazione dopo il tempo t

$$2\left(\mathrm{F}t-\int_0^t(\beta\mathrm{F}+\Pi v)dt-4\int_0^t\mathrm{P}v\,dt\right)$$

$$=\omega^2s+\frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}\,\omega^2s'+\frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}\,\frac{r^2}{\mathrm{R}'^2}\,\omega^2.\,s''$$

in cui s, s', s'' sono i momenti d'inerzia delle masse rotanti dell'albero elicoidi, degli alberi rocchetti, e dell'albero manovelle. Ponendo

$$\omega^2s+\frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}\,\omega^2s'+\frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}\,\frac{r^2}{\mathrm{R}'^2}\,\omega^2s''=\omega^2.\,\mathrm{S}$$

poscia differenziando e dividendo per $2dt$, si ha

$$F(1-\beta)-4Pv-\Pi v=S\omega\frac{d\omega}{dt}$$

facendo

$$1-\beta=\alpha$$

si avrà

$$\text{(A)}\qquad \frac{S}{\rho^2}\frac{dv}{dt}=\frac{\alpha F-\Pi v}{v}-4P\,;$$

equazione in cui α e Π sono coefficienti determinati dall' antecedente calcolo del meccanismo.

L'equazione del moto di traslazione sarà evidentemente

$$(\beta)\qquad M\frac{du}{dt}=4P-Hu^2$$

e sostituendo per P, le due equazioni diverranno

$$\text{(A)}\qquad \frac{S}{\rho^2}\frac{dv}{dt}=\frac{\alpha F-\Pi v}{v}-\frac{2m}{\pi\rho}(Rv^2-R'uv+R''u^2)$$

$$\text{(B)}\qquad M\frac{du}{dt}=4(Rv^2-R'uv+R''u^2)-Hu^2.$$

Elimino fra esse il trinomio, e fo

$$\alpha F-\Pi v=F'$$

$$\frac{S}{\rho^2}\frac{dv}{dt}=\frac{F'}{v}-\frac{m}{2\pi\rho}\left(Hu^2+M\frac{du}{dt}\right)$$

da cui

$$\text{(1)}\qquad dt=\frac{2\pi Svdv+mM\rho vdu}{2\pi\rho^2F'-m\rho Hu^2v}.$$

L'equazione (B) dà

$$\text{(2)}\qquad dt=\frac{Mdu}{4Rv^2-4R'uv+(4R''-H)u^2};$$

perciò sarà

$$(C)\quad \frac{Mdu}{4Rv^2-4R'uv+(4R''-H)u^2}=\frac{2\pi Svdv+mM\rho vdu}{2\pi\rho^2\alpha F-2\pi\rho^2\Pi v-m\rho Hu^2v}$$

equazione che converrà integrare per approssimazione.

A tal fine osservo che la velocità u parte da zero per raggiungere un valore che appartiene al moto uniforme del sistema. Suppongo ora che quest'ultimo risultato si divida in un certo numero d'intervalli eguali. Cosicchè chiamando

$$u_0\,,\ u_1\,,\ u_2\ \ldots\ldots\ u_\alpha\,,\ u_{\alpha+1}\ \ldots\ldots$$

queste velocità, esse formino una progressione aritmetica. Suppongo inoltre che alle velocità suddette corrispondano

$$v_0\,,\ v_1\,,\ v_2\,,\ \ldots\ldots\ v_\alpha\,,\ v_{\alpha+1}\ \ldots\ldots$$

$$t_0\,,\ t_1\,,\ t_2\,,\ \ldots\ldots\ t_\alpha\,,\ t_{\alpha+1}\ \ldots\ldots$$

Dopo il tempo t compreso fra t_α e $t_{\alpha+1}$ siano u e v le velocità di progressione e di rotazione, comprese fra u_α e $u_{\alpha+1}$ la 1.ª; v_α e $v_{\alpha+1}$ la 2.ª Sarà

$$u=u_\alpha+u'$$

chiamando u' una nuova variabile. Per cui

$$du=du'.$$

Considero u costante nell'intervallo fra u_α e $u_{\alpha+1}$, e pongo in sua vece

$$\frac{u_\alpha+u_{\alpha+1}}{2}=U.$$

Per tal ipotesi l'equazione (C) diviene

$$du'=\frac{2\pi S}{M}\,\frac{[(4R''-H)U^2v-4R'Uv^2+4Rv^3]dv}{2\pi\rho^2\alpha F-[2\pi\rho\Pi+mHU^2+mM(4R''-H)U^2]\rho v+4mM\rho Rv^2(U-v)}$$

la quale integrata fra i limiti

$$u'=0\,,\ v=v_\alpha\quad e\quad u'=u_{\alpha+1}-u_\alpha\,,\quad v=v_{\alpha+1}$$

dà

$$\text{(D)}\quad u_{\alpha+1}-u_\alpha=\frac{2\pi S}{M}\Big[A(v_{\alpha+1}-v_\alpha)+\log.\left(\frac{v_\alpha-\delta}{v_{\alpha+1}-\delta}\right)^{\frac{P_1}{C}}\left(\frac{v^2_\alpha+\theta v_\alpha+\theta'}{v^2_{\alpha+1}+\theta v_{\alpha+1}+\theta'}\right)^{\frac{R_1}{2C}}$$

$$-\left(\frac{2Q_1-R_1\theta}{C\sqrt{(4\theta'+\theta^2)}}\right)\text{ar.}\left(\text{tang.}=\frac{2(v_{\alpha+1}-v_\alpha)\sqrt{(4\theta'-\theta^2)}}{4\theta'-\theta^2+(2v_\alpha+\theta)(2v_{\alpha+1}+\theta)}\right)\Big]$$

essendo

$$v^3-B''v^2+B'v-B=(v-\delta)(v^2+\theta v+\theta')$$

$$B=\frac{\pi\rho\alpha F}{2mMR};\ B'=\frac{2\pi\rho\Pi+mHU^2+mM(4R''-H)U^2}{4mMR};\ B''=\frac{R'U}{R}$$

$$P_1=\frac{A'+A''\delta}{\theta'+\delta\theta+\delta^2};\ Q_1=\frac{A''\theta'-A'(\theta+\delta)}{\theta+\delta\theta+\delta^2};\ R_1=-P_1$$

$$A'=\frac{2\pi\rho\alpha F}{mM};\ A''=-\frac{2\pi\rho\Pi+mHU^2}{mM};$$

$$A=-\frac{1}{mM\rho};\ C=4mM\rho R.$$

Nel caso in cui le tre radici dell'equazione

$$v^3-B''v^2+B'v-B=0$$

sono reali, si avrà quest'altra espressione

$$\text{(D)}\quad u_{\alpha+1}-u_\alpha=\frac{2\pi S}{M}\Big[A(v_{\alpha+1}-v_\alpha)+\log\left(\frac{v_\alpha-\delta}{v_{\alpha+1}-\delta}\right)^{\frac{P_1}{C}}\left(\frac{v_\alpha-\delta'}{v_{\alpha+1}-\delta'}\right)^{\frac{Q_1}{C}}\left(\frac{v_\alpha-\delta''}{v_{\alpha+1}-\delta''}\right)^{\frac{R_1}{C}}\Big]$$

in cui δ, δ', δ'' sono le tre radici suddette, e

$$P_1=\frac{A'-A''\delta}{(\delta-\delta')(\delta-\delta'')};\ Q_1=\frac{A'-A''\delta'}{(\delta'-\delta)(\delta'-\delta'')};\ R_1=\frac{A'-A''\delta''}{(\delta''-\delta)(\delta''-\delta')}$$

L'equazione (A) dà

$$dt=\frac{\pi S}{\rho}\,\frac{vdv}{(\alpha F-\Pi v)\pi\rho-2m(Rv^3-R'uv^2+R''u^2v)}$$

sostituisco per u, U c. s. ed integrando fra i limiti

$$t_\alpha\ ,\quad v_\alpha \qquad \text{e} \qquad t_{\alpha+1}\ ,\quad v_{\alpha+1}$$

ottengo .

$$(\mathrm{D}_1)\quad t_{\alpha+1} - t_\alpha = \frac{\pi S}{2mR\rho}\left[\log\left(\frac{v_\alpha - \delta}{v_{\alpha+1} - \delta}\right)^{P_1}\left(\frac{v^2_\alpha + \theta v_\alpha + \theta'}{v^2_{\alpha+1} + \theta v_{\alpha+1} + \theta'}\right)^{\frac{-P_1}{2}}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{2Q_1 - R_1\theta}{\sqrt{(4\theta' - \theta^2)}}\right)\text{ar.}\left(\text{tang} = \frac{2(v_{\alpha+1} - v_\alpha)\sqrt{(4\theta' - \theta^2)}}{4\theta' - \theta^2 + (2v_\alpha + \theta)(2v_{\alpha+1} + \theta)}\right)\right]$$

in cui

$$v^3 - Cv^2 + Bv - A = (v - \delta)(v^2 + \theta v + \theta')$$

$$A = \frac{\pi\rho\alpha F}{2mR}\ ;\quad B = \frac{\pi\rho\Pi + 2mR''U^2}{2mR}\ ;\quad C = \frac{R'U}{R}$$

$$P_1 = \frac{\delta}{\theta' + \delta\theta + \delta^2};\quad Q_1 = \frac{\theta'}{\theta' + \delta\theta + \delta^2}\ ;\quad R_1 = -P_1.$$

§. 4. Le equazioni (D) , (D) , (D_1) offrono il modo di calcolare il moto vario del sistema in un caso determinato. Per darne un esempio suppongo che si abbia

$\rho = 0{,}15$	$R = 0{,}0385402$	$r = 0{,}08$
$m = 0{,}185$	$R' = 0{,}3926842$	$R' = 0{,}70$ ragg. ruote dent.
$\pi = 3{,}14159$ $\alpha = 0{,}9349$	$R'' = 1{,}0002599$	$R = 0{,}60$ ragg. pulegg. mag.
$F = 60$ $\Pi = 0{,}3757$	$s = 0{,}1417546$ $s' = 0{,}4790096$	$u_{\alpha+1} - u_\alpha = 0{,}40.$
$H = 1{,}9985$	$s'' = 3{,}8324050$	

Con questi dati si formano i seguenti valori

TEMPI	VELOCITÀ DI ROTAZIONE	VELOCITÀ DI TRASLAZIONE
$t = 0$	$v = 0$	$u = 0$
$t = 0'', 363$	$v = 3^m, 053$	$u = 0^m, 40$
$t = 1'', 935$	$v = 5^m, 620$	$u = 0^m, 80$
$t = 5'', 369$	$v = 8^m, 848$	$u = 1^m, 20$
$t = 10'', 895$	$v = 12^m, 241$	$u = 1^m, 60$
$t = 20'', 195$	$v = 15^m, 681$	$u = 2^m, 00$
$t = 38'', 430$	$v = 19^m, 137$	$u = 2^m, 40$

Volendo proseguire questo calcolo si trova t immaginario. Restringendo l'intervallo $u_{\alpha+1} - u_\alpha$ da $0^m, 40$ a $0^m, 10$ si trova ancora t immaginario, perchè nell'equazione (D_1), la quantità

$$\frac{v_\alpha - \delta}{v_{\alpha+1} - \delta} = \frac{\delta - v_\alpha}{\delta - v_{\alpha+1}}$$

sottoposta al logaritmo diviene negativa; ora essa non può passare dal positivo al negativo senza divenire zero o infinita. Questo secondo caso è quello che si verifica fra

$$v = 19, 137 \qquad \text{e} \qquad v = 21, 302$$

corrispondenti a

$$u = 2, 40 \qquad \text{e} \qquad u = 2, 50$$

Fra questi limiti sono dunque compresi un valore di u ed un altro di v pei quali

$$\frac{v_\alpha - \delta}{v_{\alpha+1} - \delta} = \infty \qquad \text{e} \qquad t_{\alpha+1} - t_\alpha = \infty$$

e quella coppia di valori appartiene al moto uniforme del sistema, che come è noto in simili casi, non si raggiunge che dopo un tempo infinito, benchè dopo $38'', 43$ ne differisca pochissimo. Quali siano esattamente questi valori limiti di u e v si vedrà più lungi.

§. 5. Dopo aver indicato in qual modo si possa per ogni caso speciale calcolare il moto vario del sistema, sarà a proposito d'indagare le leggi del moto equabile, e sopratutto le condizioni da adempiersi affine d'ottenere (dentro i limiti prescritti dalla natura del problema) il massimo effetto utile dalla forza motrice che si è innalzata nell'atmosfera. Riprendo adunque le equazioni (A) e (B), e suppongo che il moto sia ridotto alla permanenza, per cui

$$\frac{d\omega}{dt}=0\,,\quad \frac{du}{dt}=0\,.$$

In questo modo si ottengono le due equazioni

$$(A') \qquad \frac{F'}{v}=\frac{2m}{\pi\rho}(Rv^2-R'uv+R''u^2)$$

$$(B') \qquad Hu^2=4(Rv^2-R'uv+R''u^2)\,;$$

eliminando il trinomio

$$v=\frac{2\pi\rho F'}{mHu^2}=\frac{2\pi\rho(\alpha F-\Pi v)}{mHu^2}\,,\quad v=\frac{2\pi\rho\alpha F}{2\pi\rho\Pi+mHu^2}\,.(C')$$

Elimino v dall'equazione (B') ed ottengo

$$(D') \qquad u^2(4R''-H)\left(\rho\Pi+\frac{m}{2\pi}Hu^2\right)^2$$

$$-4\alpha\rho FR'u\left(\rho\Pi+\frac{m}{2\pi}Hu^2\right)+4\alpha^2\rho^2F^2R=0$$

equazione di 6.° grado dalla quale si ricava u, e sostituendone il valore nella (C'), si ottiene v e quindi w.

Le indeterminate del problema sono le quantità

$$L\,,\ l\,,\ a\,,\ m\,,\ \rho$$

fra cui la m è quella la cui determinazione onde ottenere il massimo effetto utile è la più confacente. Sostituendo per R, R', R'' i loro valori espressi per m si vede che il

metodo ordinario di risolvere il problema, è impraticabile nel caso attuale, onde cercherò di semplificare la questione e giungere in altro modo allo stesso risultato.

§. 6. Il valore

$$F' = \alpha F - \Pi v$$

si riduce a

$$F' = \alpha F$$

quando si trascuri Πv, ossia le resistenze dei perni su loro cuscinetti nel meccanismo di trasmissione. Con quest' ipotesi l'equazione (D') diviene

$$\text{(E)} \qquad u^6 - \frac{8\pi\rho\alpha F R'}{mH(4R'' - H)} u^3 + \frac{16\pi^2\rho^2\alpha^2F^2R}{m^2H^2(4R'' - H)} = 0.$$

Avendosi

$$R' = \frac{4\pi\rho}{m} R \; ; \quad R'' = \frac{4\pi^2\rho^2}{m^2} R$$

sarà

$$u^6 - \frac{32\pi^2\rho^2\alpha F R}{16H\pi^2\rho^2R - m^2H^2} u^3 + \frac{16\pi^2\rho^2\alpha^2F^2R}{16\pi^2\rho^2H^2R - m^2H^3} = 0.$$

Pongo

$$\frac{16\pi^2\rho^2\alpha F R}{16H\pi^2\rho^2R - m^2H^2} = g$$

si ha

$$u^3 = g \pm \sqrt{\left(g^2 - \frac{\alpha F}{H} g\right)} ;$$

per cui l'effetto utile è rappresentato da

$$Hu^3 = H\left[g \pm \sqrt{\left(g^2 - \frac{\alpha F}{H} g\right)}\right.$$

g potendo essere positivo o negativo.

Suppongo che g sia positivo

$$g = \frac{\alpha F}{H}\left\{\frac{1}{1 - \frac{m^2H}{16\pi^2\rho^2R}}\right\}$$

pongo

$$\frac{m^2H}{16\pi^2\rho^2R}=\alpha', \quad \alpha'<1; \quad g=\frac{\alpha F}{H(1-\alpha')}.$$

Ciò posto si hanno le due equazioni

$$Hu^3=\frac{\alpha F}{(1-\sqrt{\alpha'})} \text{ pel segno superiore}$$

$$Hu^3=\frac{\alpha F}{(1+\sqrt{\alpha'})} \text{ pel segno inferiore ;}$$

onde segue che pel segno inferiore Hu^3 è compreso fra $\frac{1}{2}\alpha F$ e αF; e pel segno superiore $Hu^3>\alpha F$. Questo risultato è evidentemente assurdo, poichè l'effetto utile non può mai superare la forza motrice.

Infatti quando

$$u^3>\frac{\alpha F}{H}$$

$$v=\frac{2\pi\rho\alpha F u}{mHu^3}<\frac{2\pi\rho u}{m}$$

$$\frac{v}{\rho}<\frac{2\pi u}{m}$$

locchè è opposto a quanto si é stabilito nel §. 2.

Quando g è negativo $\alpha'>1$

$$Hu^3=\alpha F\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha'}+1}\right) \text{ pel segno superiore}$$

$$Hu^3=-\alpha F\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha'}-1}\right) \text{ pel segno inferiore.}$$

Nel 1° caso Hu^3 è compreso fra o e $\frac{1}{2}F'$; nel 2° è sempre negativo.

Rappresentando dunque graficamente i valori di u mediante la quantità g, si avrà una curva a quattro rami in-

finiti rappresentati nella figura 1, la qual curva è tangente alle ascisse u all'origine delle coordinate, ha due rami assintotici ad una parallela all'asse della g condotta dal lato delle ascisse positive ad una distanza $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha F}{H}\right)}$; ed in cui le ordinate positive sono limitate da un'altra tangente parallela all'asse delle u e distante da esso la quantità $\frac{\alpha F}{H}$.

Infatti

$$\frac{dg}{du} = \frac{6u^5\left(u^3 - \frac{\alpha F}{H}\right)}{\left(2u^3 - \frac{\alpha F}{H}\right)^2}$$

diviene o per $u = 0$ e $u = \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha F}{H}\right)}$

e diviene ∞ per $u = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha F}{H}\right)}$,

che dà altresì $g = \infty$.

Il punto P a cui appartiene la massima velocità non chè il massimo effetto utile, ha per ascissa $u = \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha F}{H}\right)}$.

I valori di m che rendono adunque

$$\frac{m^2 H}{8\pi^2 \rho^2 R} > 1$$

non possono dare per effetto utile che una quantità minore di $\frac{1}{4}$ F'; e quelli che rendono la stessa quantità < 1 si approssimano tanto più al massimo effetto utile, quanto è minore il suo valore; poichè facendo

$$m = 0 \,, \quad \text{si ha} \quad \frac{m^2 H}{8\pi^2\rho^2 R} = 0$$

$$Hu^3 = \alpha F \qquad u = \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha F}{H}\right)}.$$

Nell'ipotesi fatta, si otterrebbe adunque la disposizione più vantaggiosa mediante un'infinità di spire infinitamente prossime e formanti angolo infinitesimo col piano perpendicolare all'asse di rotazione; in allora la formola

$$v = \frac{2\pi\rho\alpha F}{mHu^2}$$

dà

$$v = \infty$$

Siffatto risultato è evidentemente erroneo a cagione della inesattezza della formola di Newton per la resistenza dell'aria al moto rotatorio nel caso estremo che ora si è fatto. Quando però nè $m = 0$, nè $v = \infty$ la formola assunta per la resistenza dell'elemento può dare dei risultati abbastanza soddisfacenti, come provano le esperienze di Smeaton sui molini a vento. Eliminando adunque i valori estremi di m, risulterà nonostante che diminuendo m si aumentano la velocità v e l'effetto utile Hu^3.

§. 7. Dovrà dunque farsi in modo che la velocità v trasmessa dalla forza motrice alle puleggie, sia la maggiore che è conciliabile colla natura di essa forza e colla composizione e dimensioni del meccanismo; ora la necessità di non moltiplicar gl' ingranaggi e con essi gli attriti ed il peso da innalzarsi, nonchè di valersi della forza dell' uomo esclusivamente a qualunque altro motore, determinano il limite di v che ora chiamerò δ. Cerco adunque il valore di m per cui $v = \delta$.

Considero il ramo di curva nel quale si ha g positivo che si è visto essere il più vantaggioso, cioè

$$u^3 = g - \sqrt{\left(g^2 - \frac{\alpha F}{H} g\right)};$$

si ha

$$v = \delta = \frac{2\pi\rho\alpha F}{mHu^2}$$

$$u^2 = \left[g - \sqrt{\left(g^2 - \frac{\alpha F}{H} g\right)}\right]^{\frac{2}{3}};$$

dalle quali ponendo per g il suo valore

$$g = \frac{16\pi^2\rho^2\alpha F R}{16H\pi^2\rho^2 R - m^2H^2}$$

si ottiene

$$16\pi^2\rho^2 R\left[\alpha F - \left(\frac{2\pi\rho\alpha F}{m\delta H^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 = \left(\frac{2\pi\rho\alpha F}{m^{\frac{1}{3}}\delta}\right)^3 \qquad (G)$$

Quest'equazione determina m in funzione di δ e delle costanti del problema nel modo suindicato. Siccome

$$\rho^2 R = \frac{\gamma L m}{2\pi}\left[(l+a)^2 - a^2 - \frac{m^2}{4\pi^2}\log\left(\frac{m^2 + 4\pi^2(l+a)^2}{m^2 + 4\pi^2 a^2}\right)\right]$$

$$= \frac{\gamma L m}{2\pi}\left((l+a)^2 - a^2\right)$$

quando si trascuri il 2° secondo termine, che pei valori non molto grandi di m è sempre assai piccolo rispetto al 1°, la medesima diviene

$$8\pi\gamma L m\left((l+a)^2 - a^2\right)\left[\alpha F - \left(\frac{2\pi\rho\alpha F}{m\delta H^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 = \left(\frac{2\pi\rho\alpha F}{m^{\frac{1}{3}}\delta}\right)^3$$

Il valore di m che se ne ritrae sarà tanto minore per un

dato δ quanto è più piccolo ρ; onde si deduce che quest'indeterminata deve essere assai tenue.

La quantità α' da cui dipende l'effetto utile, può anche scriversi sotto una forma più semplice, ritenendo il valore approssimato di $\rho^2 R$. Infatti se chiamo μ il coefficiente che, moltiplicato per l'area della sezion massima Σ dell'elevatore, rappresenta la riduzione della medesima, attesa la configurazione della prua, nel calcolo della resistenza al moto di traslazione, sarà

$$H = \gamma\mu\Sigma.$$

Siano inoltre Σ', l'area di un'ala elicoidica; n, come si disse, il numero delle medesime; Σ'' la sezion rettangolare dei cilindri che circoscrivono le elicoidi, o per dir meglio la differenza delle loro sezioni rette.

$$\Sigma' = \iint \frac{\sqrt{\left(\cos^2 \frac{2\pi x}{m} + \frac{4\pi^2}{m^2} y^2\right)} \cdot dxdy}{\cos^2 \frac{2\pi x}{m}}$$

$$= L\left[\frac{m}{2\pi} \log \left(\frac{2\pi(l+a) + \sqrt{[m^2 + 4\pi^2(l+a)^2]}}{2\pi a + \sqrt{(m^2 + 4\pi^2 a^2)}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{m}\left((l+a)\sqrt{[m^2 + 4\pi^2(l+a)^2]} - a\sqrt{(m^2 + 4\pi^2 a^2)}\right)\right]$$

quantità che per dei valori frazionarii assai tenui di m, come quelli che si è visto appartenere al massimo effetto utile, e che si ritraggono dall'equazione (G), si riduce con molta approssimazione a

$$\Sigma' = 2L \frac{\pi}{m}\left((l+a)^2 - a^2\right).$$

Inoltre

$$\Sigma'' = \pi\,[(l+a)^2 - a^2].$$

Queste espressioni sostituite in α', danno

$$\alpha' = \frac{\mu\Sigma}{n\Sigma'}$$

$$\alpha' = \frac{m\mu\Sigma}{2n\mathrm{L}\Sigma''} ;$$

equazioni che non contengono γ, onde se ne deduce, che isolatamente considerate cioè non derivando m dalla (G), purchè frazionario, hanno luogo teoricamente tanto per l'aria, come per l'acqua o qualunque altro fluido. Da esse si rileva che l'effetto utile, è in ragione diretta della superficie Σ'', del numero n, e della lunghezza L, ed in ragione inversa del passo m e della superficie ridotta $\mu\Sigma$; ovvero, in ragione diretta della superficie $n\Sigma'$ ed inversa della $\mu\Sigma$.

§. 8. Fino ad ora si è trascurata la quantità di azione Πv. Essa deve evidentemente impicciolire le velocità v, u. Il valore di m dato dall'equazione (G) dopo avervi introdotto i valori di L, a, l, ρ determinati dalle considerazioni precedenti, nonchè di αF e di H dipendenti da V, non coincide adunque colla disposizione più vantaggiosa quando si tenga conto di tutte le circostanze del moto. Per ottenerla, finalmente traggo dall'equazione (G) un valore di m che sostituisco nell'equazione approssimata

$$u^2 = \frac{2\pi\rho\alpha\mathrm{F}}{m\mathrm{H}v} = \frac{2\pi\rho\alpha\mathrm{F}}{m\mathrm{H}\delta}$$

che deriva dalla (C′) trascurandovi Π. Ne ritraggo u che sostituisco nella medesima, ed ottengo m che farò $=\psi$ dopo avervi posto come sopra $v = \delta$. Il primo risultato sarà un limite superiore, ed il secondo un limite inferiore di m. Con $m = \psi$ ottengo dalla (D′) un nuovo valore di u che sostituito assieme a $v = \delta$ nella (C′) darà $m = \psi'$. Di nuovo (D′) darà u che sostituisco nella (C′) da cui ricavo $m=\psi''$. Proseguendo a sostituire nella (D′) per ottenere u, e nella (C′) per avere m si può giungere con tutta l' approssima-

zione che si desidera ai valori esatti di m e di u, locchè potrebbe anche direttamente ottenersi dalle eq. (C') e (D') fattovi $v=\delta$.

L'equazione (E) e la curva superiore della figura 2ª indicano con molta esattezza i valori della velocità u quando m non è piccolissimo; altrimenti danno dei risultati erronei, e tanto più falsi quanto più m avvicinandosi allo zero, la velocità v ed il termine Πv sono considerevoli. Per avere una formola semplice con cui calcolare i valori di u quando m poco differisce da zero, e determinare la forma della curva in quest'ipotesi, riprendo la equazione (D') e sostituendo invece di R' e R'' i loro valori in R, ottengo

$$(D') \qquad u^2\left(\frac{16\pi^2\rho^2 R - m^2 H}{m^2}\right)\left(\Pi\rho + \frac{m}{2\pi} H u^2\right)^2$$

$$- \frac{16\pi\rho^2}{m} R\alpha F.u\left(\Pi\rho + \frac{m}{2\pi} H u^2\right) + 4\alpha^2 F^2 \rho^2 R = 0.$$

Si è posto

$$\rho^2 R = \frac{\gamma L m}{2\pi}\left[(l+a)^2 - a^2 - \frac{m^2}{4\pi^2}\log\left(\frac{m^2+4\pi^2(l+a)^2}{m^2+4\pi^2 a^2}\right)\right];$$

sviluppando il logaritmo, e trascurando nel 2.° membro le potenze superiori alla 4ª, si ha

$$\frac{\rho^2 R}{m^2} = \frac{\gamma L}{2\pi}\left[\frac{(l+a)^2 - a^2}{m} - \frac{m}{2\pi^2}\log\left(\frac{l+a}{a}\right) + \frac{m^3}{(4\pi^2)^2}\,\frac{(l+a)^2 - a^2}{a^2(l+a)^2}\right]$$

Pongo

$$A = \frac{\gamma L}{2\pi}\left((l + a)^2 - a^2\right); \quad B = \frac{\gamma L}{4\pi^3} \log\left(\frac{l + a}{a}\right);$$

$$C = \frac{\gamma L}{32\pi^5} \quad \frac{(l + a)^2 - a^2}{a^2(l + a)^2};$$

$$\frac{\rho^2 R}{m^2} = \frac{A}{m} - Bm + Cm^3 .$$

Sostituisco questo valore nell'equazione (D'); poscia sviluppando il valore di u in serie ascendente secondo le potenze di m, e trascurando quelle superiori alla 4ª, si ottiene col metodo di Lagrange (V. Lacroix trattato di Calcolo Diff. e Int., 1° vol.)

$$(P) \qquad u = \frac{\alpha F}{2\pi\rho\Pi} m \left[1 - \left(\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{H}{A}}\right) m^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{H}{A}}\right)^3 m^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{H}}{\pi A^{\frac{3}{2}}}\left(B + \frac{1}{16}\,\frac{H^2}{\pi^4 A}\right) m^{\frac{5}{2}}\right].$$

Da quest'equazione si rileva che per $m = 0$ si ha $u = 0$ e non già $\sqrt[3]{\frac{\alpha F}{H}}$ come si otteneva coll'equazione approssimata (E). Essa offre il modo di calcolare con facilità i valori di u per m prossimo allo zero, preferibilmente all'equazione (D'). Ma prima bisognerà conoscere quali siano, se positivi o negativi, i segni dei termini dopo il 1°, che sono affetti dalla radice di 2° grado. Si è veduto infatti antecedentemente che l'equazione in u fornisce due valori per ognuno di m, uno dei quali non soddisfa alla condizione $\frac{v}{\rho} > \frac{2\pi u}{m}$ posta nel §. 2. Suppongo che si dia alla radice il segno —, per cui

$$u = Mm + M'm^{\frac{3}{2}} \text{ ec.,} \quad \text{ossia} \quad u > \frac{\alpha F}{2\pi\rho\Pi} m;$$

sarà

$$\frac{2\pi u}{m} > \frac{\alpha F}{\rho\Pi};$$

ma l'equazione (C') riducendosi per dei valori piccolissimi di m a

$$v = \frac{\alpha F}{\Pi};$$

si avrà

$$\frac{2\pi u}{m} > \frac{v}{\rho}.$$

L'ipotesi anzidetta è perciò inammissibile; per cui dovrà addottarsi per le radici il segno $+$ e per la serie il $-$. Si vedrà poi facilmente qual'è la sua tangente all'origine, ov'essa è concava verso le ascisse, e se ne determinerà il corso pei punti prossimi alla medesima.

Quando $m = \infty$, la superficie elicoidale diviene un piano che passa per l'asse di rotazione; in questo caso si ha evidentemente $u = 0$. Il valore di v è dato dall'equazione (A') col porre $m = \infty$, pel quale

$$mR = \frac{\gamma L\pi}{\rho^2}\left((l+a)^4 - a^4\right);$$

sostituendo si ha l'equazione

$$v^3 + \frac{\Pi\rho^3}{2\gamma L\,[(l+a)^4 - a^4]}\,v - \frac{\alpha F\rho^3}{2\gamma L\,[(l+a)^4 - \alpha^4]} = 0$$

da cui si trae v. Trascurando Π, si ha immediatamènte

$$v = \rho \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha F}{2\gamma L\,[(l+a)^4 - a^4]}\right)}.$$

Il valore di v somministra il numero dei giri delle superficie elicoidali in 1''. Infatti

$$v = 2\pi\rho N$$

chiamando N questo numero.

Affine di addimostrar viemmeglio l'influenza della quantità m sui risultati che si ottengono per u e v, non chè l'approssimazione che si raggiunge ommettendo la resistenza Πv nella più parte dei casi, aggiungo uno specchio che contiene i risultati di queste differenti formole per dei successivi valori di m, e pei seguenti delle indeterminate.

$$F = 60\,; \quad \alpha = 0{,}9349\,; \quad \Pi = 0{,}3757\,; \quad a = 0{,}10\,;$$
$$l = 0{,}40\,; \quad 2L = 4\,; \quad \rho = 0{,}15\,; \quad H = 1{,}9985.$$

Valori di m	Valori di u			Valori di v		Valori di N	
	Equaz. (P)	Equaz. (D')	Equaz. (E)	Equaz. (C')	Equaz. (C'')	Equaz.' (F') (C')	Equaz.' (F') (C'')
0, 00	0, 00		3, 04	149, 31	∞	158, 41	∞
0, 01	1, 32		2, 89	135, 90	316, 79	144, 19	336, 12
0, 10		2, 44	2, 64	34, 24	37, 81	36, 33	40, 10
0, 30		2, 37	2, 45	14, 21	14, 69	15, 08	15, 58
0, 50		2, 29	2, 34	9, 45	9, 69	10, 03	10, 28
0, 70		2, 24	2, 25	7, 17	7, 46	7, 61	7, 92
1, 00		2, 12	2, 14	5, 66	5, 75	6, 01	6, 11
3, 00		1, 67	1, 68	3, 10	3, 11	3, 28	3, 30
5, 00		1, 40	1, 41	2, 65	2, 66	2, 81	2, 83
7, 00		1, 22	1, 22	2, 50	2, 51	2, 65	2, 66
10, 00		1, 04	1, 04	2, 41	2, 42	2, 55	2, 57
100, 00		0, 34	0, 34	2, 29	2, 30	2, 43	2, 44
∞		0, 00	0, 00	2, 29	2, 30	2, 43	2, 44

§. 9. Dopo i calcoli teorici finora addotti contemplo il caso speciale che ho impreso a trattare, e determino la forma dell'elevatore, le sue dimensioni, nonchè il meccanismo al quale suppongo applicata la forza motrice, di cui si può disporre.

Ho calcolato il volume V dell' elevatore necessario ad innalzare un peso di 1500 kil. Conviene disporre questo volume in modo, che la forma a cui viene foggiato sia la più atta a fender l'aria, senza oltrepassare il limite dell'allungamento che fu fissato a meno di tre diametri della sezione massima. È evidente che la forma sferica offre una resistenza troppo considerevole; può inoltre supporsi che per le mediocri velocità quali sono quelle che possono ottenersi dall'applicazione delle forze dell'uomo all'aerostatica, la resistenza dell'aria sia data dallo stesso coefficiente di riduzione dell'acqua, per ugual forma di solido immerso. Per questo liquido, lo studio e la pratica della navigazione ordinaria hanno determinato la forma delle appendici, poppa e prua d'una nave che offrono la minima resistenza. Per un aerostato non si ha nessuna certezza sulla migliore determinazione delle curvature, cioè forma, disposizione e lunghezza delle medesime. Siccome però il fluido che circonda l'aerostato ha sensibilmente la stessa densità tutt'all'ingiro di esso, suppongo che l'elevatore abbia la forma di un solido di rivoluzione coll'asse orizzontale. Suppongo inoltre che la prua risulti dalla rotazione di un semi-arco di circolo, la cui semi-corda sia quadrupla della freccia; ch'essa sia seguita da un corpo cilindrico, e venga desso terminato da un emisfero. (V. figura 3ª).

Siano

r raggio della sezione cilindrica massima.

l la sua lunghezza.

Il volume della prua è

$$\pi\int_0^{4r} y^2 dx = \pi\int_0^{4r}\left[\frac{-15}{2}r + \sqrt{\left(\frac{225}{4}r^2 + 8rx - x^2\right)}\right]^2 dx$$

$$= 2{,}176.\pi r^3\ ;$$

quello del cilindro è

$$\pi r^2 l\ ;$$

dell'emisfero

$$\frac{2}{3}\pi r^3\ ;$$

onde

$$V = \pi r^3\left(2{,}842 + \frac{l}{r}\right).$$

Pongo

$$r = 5\ ;\quad l = 2{,}641\ ,$$

ed ottengo

$$V = 1323{,}49$$

volume prefisso.

La lunghezza totale è m. 27,641, minore di tre diametri. La superficie dell'elevatore è per la prua

$$2\pi\int_0^{4r} y ds = 434{,}42,$$

pel cilindro

$$2\pi rl = 82{,}97.$$

Per l'emisfero

$$2\pi r^2 = 157{,}08.$$

In totale

m. q. 674,47.

Al disotto dell'elevatore è sospesa con delle funi al modo ordinario la galleria contenente l'aeronauta, gli uomini addetti alle manovelle, il meccanismo di trasmissione della forza motrice alle superficie elicoidali, il recipiente per la zavorra d'aria compressa, il paracadute, la pompa premente, gli strumenti di fisica e tutt'altro che è d'uopo per un escursione aerea. È noto che un corpo immerso in un flui-

do, quando sia lestato, fa delle oscillazioni a guisa d' un pendolo attorno alla sua posizione d'equilibrio, tuttavolta che una forza qualunque lo distoglie da essa. È necessario che nella situazione normale, da cui le correnti atmosferiche possono far deviare il sistema, l'asse maggiore dell' elevatore, come pure la piattaforma della galleria siano orizzontali, facendo ora astrazione dalla resistenza dell'aria attraversata e percossa che può poco modificare questa condizione. Deve perciò collocarsi il centro di gravità del sistema immerso, verticalmente al disotto di quello dell'aria spostata, quando l'asse del solido di rivoluzione è orizzontale. Il centro di gravità dell'elevatore può supporsi coincidere con quello del volume che occupa, poichè ho supposto perfettamente riempita all'altezza d'equilibrio verticale, la capacità del medesimo, ed è piccolo errore il negligere la stoffa che l' inviluppa. Quello della galleria e di tuttociò ch'essa contiene, potrà farsi coincidere verticalmente col centro di figura della piattaforma. Siffatto punto dovrà dunque situarsi verticalmente, colla condizione anzidetta, sotto il centro di gravità del fluido spostato, o per dir meglio dell'elevatore che ne forma la massima parte. Il lieve errore che può prodursi per queste semplificazioni, potrebbe correggersi all'atto pratico, col trasportare alcuni dei pesi innalzati nella galleria, dall' uno all' altro punto attorno al centro di gravità della medesima.

Ciò posto ricerco sull'asse dell'elevatore il centro di gravità della massa d'aria spostata dal medesimo.

Centro di gravità della prua; X distanza dall' estremità di essa.

$$XV = \pi\int_0^{4r} y^2 x\,dx = \pi\int_0^{4r}\left[-\frac{15}{2}r + \sqrt{\left(\frac{225}{4}r^2 + 8rx - x^2\right)}\right]^2 x\,dx$$
$$= 5{,}950.\pi r^4.$$

Centro di gravità del cilindro. X' distanza dall'estremità id.

$$V'X' = \pi r^2 l \left(4r + \frac{l}{2}\right).$$

Centro di gravità dell'emisfero. X″ distanza come sopra

$$V''X'' = \frac{2}{3}\pi r^3 \left(4r + l + \frac{3}{8} r\right);$$

a distanza del centro di gravità della massa d'aria dal vertice della prua

$$a = \frac{\pi r^4 \left(8,866 + 4,666 \times \frac{l}{r} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{r^2}\right)}{\pi r^3 \left(2,842 + \frac{l}{r}\right)} = 16,^{m} 573.$$

§. 10. La figura 3ª indica il meccanismo assai semplice, già accennato nel §. 3, col quale mi é parsò a proposito di trasmettere l'azione degli uomini applicati alle manovelle all'albero delle elicoidi. Le ruote d'ingranaggio hanno per iscopo di aumentare la velocità δ e renderla abbastanza considerevole per ottenere una frazione rilevante della forza impiegata. L'elevatore è capace d'innalzare 10 uomini da applicarsi alla rotazione delle manovelle. Ora la quantità d'azione che può sviluppare ciascuno d'essi è valutata a sei Kilogrammetri per 1″. Sarà perciò

$$F = 60^{k.m.}$$

Ciò posto siano, ritenute le denominazioni antecedenti,

$r' = 0,20$

$R' = 0,70$

$r = 0,08$

$R = 0,60$

$\rho = 0,15$

$n = 175$

$n' = 20$

$v' = 0,80$

$$v = \frac{R'}{r'}\frac{R}{r}v' = 21,00$$

Albero delle manovelle
- $d = 0,021$ diam. del perno sul montante di mezzo.
- $d' = 0,021$ id. dei due perni sui montanti attigui.
- $d'' = 0,022$ id. id. sulle traverse seguenti.
- $d''' = 0,018$ id. id. sulle traverse estreme.

$d_1 = 0,014$ id. dei quattro perni degli alberi dei rocchetti.

Albero delle elicoidi
- ${}_1d = 0,025$ id. dei due perni prossimi alle elicoidi.
- ${}_1d' = 0,012$ id. id. estremi.

$P, P', \ldots P_1, {}_1P, {}_1P'$ pressioni medie dei perni contro i cuscinetti.

$f' = 0,085$ coefficiente dell'attrito dei perni nei cuscinetti.

$f'' = 0,08$ id. id. dei denti degl'ingranaggi.

$f''' = 0,33$ coefficiente dell'attrito delle funi nelle gole delle puleggie.

$s = \rho.\text{ar}(= 512°.31') = 8,954.\rho$ arco abbracciato dalla fune perpetua sulla puleggia minore.

p pressione proveniente dal peso fra un perno ed un cuscinetto.

q pressione orizzontale proveniente dai denti delle ruote e rocchetti.

Per calcolare la pressione media Π' che ha luogo nel periodo di una rivoluzione fra un perno ed un cuscinetto dell'albero delle manovelle, suppongo che lo sforzo degli uomini sia sempre tangente al gomito delle medesime, e che $\frac{F}{m'v'}$ sia, per una di esse la risultante delle pressioni esercitate dalla forza motrice, degli uomini la quale formi l'angolo φ coll'orizzontale in un dato istante della rivoluzione. Ne segue l'equazione

$$\Pi'=\frac{\int_0^{2\pi}\sqrt{\left[\left(p+\frac{F}{m'v'}\operatorname{sen}\varphi\right)^2+\left(q+\frac{F}{m'v'}\cos\varphi\right)^2\right]}.d\varphi}{2\pi};$$

da cui

$$\Pi'=\sqrt{\left[p^2+q^2+\left(\frac{F}{m'v'}\right)^2\right]}\left\{1-\frac{1}{16}\left[\left(\frac{2Fp}{m'v'\left[p^2+q^2+\left(\frac{F}{m'v'}\right)^2\right]}\right)^2+\left(\frac{2Fq}{m'v'\left[p^2+q^2+\left(\frac{F}{m'v'}\right)^2\right]}\right)^2\right]\right\}.$$

Il secondo membro del valore completo di Π' forma una serie convergente stante i valori da sostituirsi, di cui non ho considerato che i primi termini, sufficienti nel calcolo attuale.

Con questa formola valuto le pressioni pei differenti perni dell'albero delle manovelle, avvertendo ché p, F, m', v' sono noti esattamente, e q si calcola in questi casi col metodo delle false posizioni che dà tutta l'esattezza desiderabile.

Si ottiene

$$P = 28{,}97$$
$$P' = 26{,}01$$
$$P'' = 29{,}82$$
$$P''' = 19{,}44\,.$$

Per gli altri alberi

$$P_1 = 8{,}36$$
$$\begin{cases} {}_1P = 21{,}41 \\ {}_1P' = 1{,}83\,; \end{cases}$$

i quali due ultimi valori dovranno calcolarsi successivamente come testè si è detto per essere m tuttora incognito.

Si è chiamata F' là quantità d'azione trasmessa alle superficie elicoidali. Il calcolo del meccanismo di trasmissione, dà la seguente equazione che può dedursi da quanto si disse nel §. 3.

$$'F = \frac{F - 0{,}085\,\frac{v'}{2r'}(Pd + 2P'd' + 2P''d'' + 2P'''d''')}{1 + \frac{1}{e^{\frac{f'''s}{\rho}} - 1}\left[1 + 0{,}08\,\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\right]} \; \frac{-0{,}085\frac{v'}{2r'}\,\frac{R'}{r'}\,4P_1 d_1}{1 + \frac{1}{e^{\frac{f'''s}{\rho}} - 1}}$$

$$- 0{,}085\,\frac{v'}{2\rho}\,\frac{R'}{r'}\,\frac{R}{r}(2\,{}_1P_1 d + 2\,{}_1\rho'{}_1 d')\,.$$

Sostituendo i valori antecedenti, si ha

$$F' = 0{,}9349\,F - 0{,}3757.v$$

per cui

$$\alpha = 0{,}9349\,; \quad \Pi = 0{,}3757.$$

§. 11. Rimane da calcolarsi il coefficiente della resistenza Hu^2 al moto di traslazione. Come dissi da principio non è guari possibile determinarlo con esattezza per altra forma di solido totalmente immerso fuorchè la sferica, poichè non

si hanno esperienze all'uopo. Le velocità di traslazione che possono imprimersi al sistema sono sempre lievi, per cui l'aria non verrà sensibilmente condensata nè rarefatta antecedentemente e posteriormente all' aerostato, come accade nell'acqua che é incompressibile. Nella navigazione ordinaria si è giunti ad ottenere (pei grandi vascelli e soprattutto pei battelli a vapore) dei coefficienti tenuissimi che riducono a 0,16 pei primi; 0,12 pei secondi e più recentemente, pretendesi, 0,05 e 0,045, l'area della massima sezione immersa. Qual coefficiente debba applicarsi nel caso attuale non si può precisare. Formo pertanto due limiti frai quali mi pare debba rinvenirsi. Il limite minimo per l'elevatore suppongo sia 0,12 come nella navigazione comune. Un limite maggiore è dato dal conoscersi che per un prisma rettangolare munito di una prua formata da due piani laterali ad angolo di 18° coll'asse, ed inoltre fornito di una poppa, il moltiplicatore della sezione immersa è 0,35. (V. Claudel; Manuel de l'Ingénieur.) Nel caso attuale l'angolo è 14°.2'.10" perchè la freccia è quadrupla del raggio; inoltre quest' inclinazione trovasi tutt' all' intorno del corpo immerso, anzi è desso tondeggiante per ogni verso; circostanze tutte che diminuiscono il coefficiente suddetto che può risguardarsi siccome un limite superiore. Convien inoltre tener conto della resistenza degli uomini, del meccanismo, dei cordaggi, della piattaforma, del recipiente per la zavorra e di tuttociò che seco trasporta l'aerostato, al moto progressivo. D' appresso a dei calcoli approssimativi e nell'ipotesi che tutto sia disposto in modo da offrire la minima resistenza al moto, valuto queste ultime resistenze a 0,06 della superficie della sezione massima. Il limite minore sarà dunque μ=0,18, ed il maggiore μ=0,41. Siccome

$$H = \mu.\gamma.\pi r^2 ;$$

nel 1° caso

$$H = 0,8774\,;$$

nel 2°

$$H = 1,9985.$$

§. 12. Con questi valori posso calcolare la velocità di traslazione, e l'effetto utile per ciascuno di questi limiti. Quando suppongo $H = 0,8774$, l'equazione (G) postovi $\delta = 21$, dà

$$m = 0,243.$$

L'equazione approssimata

$$u^2 = \frac{2\pi\rho\alpha F}{mH\delta}$$

dà

$$u = 3,436.$$

Sostituisco nella (C')

$$m = \frac{2\pi\rho(\alpha F - \Pi\delta)}{Hu^2\delta}$$

da cui ritraggo

$$m = 0,2089 = \psi.$$

L'equazione (D') darà in seguito

$$u = 3,310.$$

L'equazione (C')

$$u = 0,2251 = \psi'$$

(D') $\quad u = 3,308$

(C') $\quad m = 0,2254 = \psi''$

valore che può aversi per esatto del pari che l'antecedente di u.

L'effetto utile è

$$E_u = Hu^3 = \overset{k \cdot m \cdot}{31{,}7595}$$

$$\frac{E_u}{F} = 0{,}5293$$

$$F' = 48{,}2043$$

$$\frac{E_u'}{F'} = 0{,}6589\,.$$

Per $H = 1{,}9985$, l'equazione (G) dà

$$m = 0{,}1965$$

$$u^2 = \frac{2\pi\rho\alpha F}{mH\delta} = (2{,}532)^2$$

L'equazione (C') $\quad m = 0{,}1688 = \psi$

(D') $\quad u = 2{,}422$

(C') $\quad m = 0{,}1845 = \psi'$

(D') $\quad u = 2{,}419$

(C') $\quad m = 0{,}1850 = \psi''$.

Questi due ultimi valori possono ritenersi esatti, poichè ψ'' non differisce da ψ' fuorchè nella 4ª cifra, ed u dall'antecedente nella 3ª. I valori delle costanti che hanno dato quest'ultimo risultato sono identici con quelli del §. 4° in cui si calcolò per approssimazione il moto variabile del sistema. Il valore limite di u che si trovò dover essere compreso fra 2,40 e 2,50, si vede ora essere 2,419. Quello di v racchiuso fra 19,137 e 21,302, è $\delta = 21$.

L'effetto utile è

$$E_u = 28{,}2886$$

$$\frac{E_u}{F} = 0{,}4715$$

$$\frac{E_u}{F'} = 0{,}5868\,.$$

Il risultato che si ottiene in questo secondo caso è inferiore all'antecedente. Infatti pel limite minore

$$\alpha' = \frac{\mu \Sigma}{n \Sigma'} = 0{,}26413$$

pel maggiore

$$\alpha' = \frac{\mu \Sigma}{n \Sigma'} = 0{,}49339 ,$$

e perciò che s'è detto l'effetto utile dev' essere maggiore nella 1ª di quello che nella 2ª ipotesi.

§. 13. I due limiti della velocità u

$$u = 3{,}308$$

$$u = 2{,}419$$

somministrano il viaggio orizzontale in un'ora che è

m. 8708,40 pel minimo.

m. 11908,80 pel massimo.

Teoricamente adunque risulta un traggitto abbastanza rilevante, benchè all'atto pratico lo sforzo degli uomini addetti alla manovra possa esser minore ed interrotto per la situazione imbarazzante e pericolosa in cui sarebbero situati.

§. 14. Supponendo ora che l' albero delle manovelle, quello delle superficie elicoidiche, nonchè gli altri due dei rocchetti e puleggie, i perni di essi, i due rocchetti, i denti delle ruote motrici, i tre montanti che sostengono l'albero delle manovelle, le traverse fra i montanti che ricevono i perni, i cuscinetti, in cui essi s'aggirano, le puleggie dell'albero delle elicoidi, il recipiente per la zavorra e l'ossatura di due ventole per la rotazione di tutto il sistema, siano di ferro fuso del peso specifico di Kil. 7207 : gli otto montanti laterali, le ruote dentate tranne i denti ed il mozzo, le puleggie dell'albero dei rocchetti, e la piatta-

forma, di abete bianco del peso specifico di Kil. 657; il peso di Kil. 1500 si distribuisce nel modo seguente :

Stoffa dell'elevatore, rete e funi di sospensione	Kil.	50,00
8 Montanti di legno	»	86,10
1 Albero delle manovelle e manovelle. .	»	73,05
2 Ruote dentate	»	70,00
2 Rocchetti e 2 puleggie.	»	28,00
2 Alberi dei rocchetti	»	3,06
4 Traverse per questi cuscinetti, perni etc.	»	7,22
11 Perni dei tre alberi	»	2,46
3 Appoggi per l'asse delle manovelle . .	»	19,68
1 Albero delle superficie elicoidali; superficie colle loro ossature, perni, cuscinetti, puleggie, funi continue	»	52,50
4 Traverse per l'albero delle superficie anzidette.	»	3,28
2 Ventole per la rotazione orizzontale del sistema e meccanismo necessario	»	12,10
1 Recipiente sferico e zavorra d'aria compressa.	»	33,78
4 Traverse per l'albero delle manovelle, cuscinetti dei perni ec.	»	8,61
Traverse, longherine, e tavolato per la piattaforma.	»	235,33
Peso di undici uomini	»	715,00
Parapetto, istrumenti di fisica, pompa premente, paracadute, zavorra ec.	»	99,83
Totale	Kil.	1500,00

§. 15. I dieci uomini addetti al lavoro delle manovelle non possono sviluppare lo sforzo di $6^{k \cdot m \cdot}$ ciascuno per ogni 1″, se non durante 8 ore del giorno, e con degli intervalli di riposo. Se il traggitto dovesse durare parecchie ore, converrebbe fissare delle soste periodiche per ognuno di essi. Suppongo per es. che il viaggio debba compiersi

in ore a; che il numero di uomini costantemente addetti al lavoro sia n e n' quello degli uomini in riposo; 8 le ore di lavoro effettivo, come si è detto, separate dopo ognuna di esse dà degli intervalli eguali di riposo per ogni uomo. Si avrà

$$a = 8\left(1 + \frac{n'}{n}\right)$$

$$n' = 10 - n$$

$$a = \frac{80}{n}$$

Suppongo che ogni intervallo debba essere $> 25'$

$$\frac{n'}{n} = \frac{10}{n} - 1 > 25'$$

Condizione che è soddisfatta da $n = 7$. In tal modo ogni uomo avrà dopo non più di 1^h di lavoro

$$\frac{60'}{7} \times 3 = 25'.42'',86$$

di riposo. La durata del viaggio è $a = 11^h.25'.43''$. Il numero degli uomini agenti da 10 è ridotto a 7. Se poi l'escursione dovesse durare parecchi giorni, $\frac{2}{3}$ del giorno intero, cioè 16 ore avrebbero tre uomini alle manovelle, e le altre 8 ne avrebbero 4. A ciò aggiungasi che il peso della galleria dovrebbe aumentarsi onde offrire spazio, ricovero e sussidii pel riposo dei lavoranti e dell'aeronauta, circostanza che obbligherebbe ad aumentare le dimensioni dell'elevatore, e quindi la resistenza H. I risultati ottenuti sono dunque riferibili soltanto ad un brevissimo traggitto, per cui gli uomini addetti alle manovelle possano senza interruzione sviluppare la loro forza motrice.

§. 16. Infine osservo che le velocità ottenute, anche la

massima, sarebbero lungi dal poter vincere l'ostacolo che presentano le correnti atmosferiche. Infatti un corpo immerso in un fluido non tarda ad acquistare la velocità stessa da cui questo fluido è animato. Se poi gli s' imprima un moto in una certa direzione, esso seguirà un allineamento nello spazio assoluto, che è risultante della velocità concepita identica col fluido, e dell'altra che gli è stata meccanicamente impressa. Riferito il galleggiante al fluido non è dotato che della velocità di traslazione impressa dalla forza motrice, la quale non è menomamente influenzata dalla preconcepita. Cosicchè i risultati ottenuti si verificàno tanto nella quiete perfetta dell'aria atmosferica, come per una velocità qualunque della medesima, comune col corpo immerso. Siccome però la direzione a cui si attende non è relativa all'aria, ma assoluta nello spazio, è evidente che deve cercarsi di combinare le due velocità in modo che la risultante sia nella direzione prefissa. Nella navigazione ordinaria, supposto il vento direttamente opposto alla linea da percorrersi, una nave in mare bordeggia stringendo il vento sotto un angolo di 60° a 70°, e percorre ora a destra ora a sinistra del rombo prefisso uno spazio, che valutato sul medesimo, equivale a metà circa dello spazio che avrebbe percorso con un vento favorèvole. Nel caso attuale il corpo immerso non concepirà per forza del vento, se non la direzione stessa del vento, per cui non si può giungere con tutta certezza ad un dato punto, se non neutralizzando costantemente la componente della velocità del vento perpendicolare alla direzione, ed inoltre superando, qualora sia contraria, la componente che trovasi sulla medesima. Questo è ciò che sarebbe ineseguibile colle piccole velocità ottenute, le quali sono di molto inferiori ai venti che dominano frequentemente nell' atmosfera.

È perciò che fu riconosciuto da chi si occupò dell' aeronautica, che il miglior modo di trar profitto dall' in-

venzione degli Aerostati consiste, come già si disse, nello studiare le direzioni delle correnti aeree e col successivo alzamento ed abbassamento, abbandonarsi alle medesime, scegliendo quegli strati in cui esse favoriscono il moto nella linea prefissa.

La velocità media ottenuta è m. 2,863; le correnti atmosferiche, avranno sovente m. 6 di velocità, senza tener conto dei venti forti e violenti che possono raggiungere fino a 45 metri al 1″. La velocità calcolata è adunque meno della metà di quella che può comunemente trovarsi nell'atmosfera; ond'è che non solo sarebbe impossibile superarla quando si trovasse nel semicircolo opposto al moto, ma ben anche in una frazione considerevole di quello che gli è favorevole. Infatti converrà che la direzione del vento abbia una componente perpendicolare alla direzione del moto che non oltrepassi la velocità impressa dal meccanismo. Ciò posto ritenendo

$$v = 2{,}863\ , \qquad v' = 6{,}00$$

le due velocità, se l'angolo del vento colla linea prefissa supera φ, essendo

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{v}{v'}\ , \quad \varphi = 28^{\circ}.30'.2''$$

sarà impossibile neutralizzare la componente perpendicolare alla direzione, e si dovrà divergere da questa. Così adunque meno di un sesto della rosa dei venti permetterebbe di contare con certezza sull'arrivo al preciso punto determinato, e sarebbe in ogni altro caso necessario di variare gli strati atmosferici, onde raggiungere lo scopo del viaggio, od almeno tentare di raggiungerlo.

I calcoli precedenti addimostrano l' impossibilità di applicare l'aeronautica al transito ordinario mediante il motore elicoidale, per un solo caso determinato; ciononostante può forse dedursene altrettanto per qualunque altra ipotesi, sol che si rifletta all'impossibilità d'ingrandir oltre misura il volume dell'elevatore ed in conseguenza la tensione che prove-

rebbe la stoffa flessibile che ne forma l'involucro; pel quale la resistenza deve farsi proporzionale al maggior raggio di curvatura in ciascun suo punto.

Infatti (calcolando approssimativamente), l'equazione del §. 6.

$$Hu^3 = \frac{\alpha F}{1 + \sqrt{\alpha'}}$$

addimostra che

$$Hu^3 = \theta\alpha F = \theta' F$$

θ' essendo < 1 ; perciò

$$u = \sqrt[3]{\left(\frac{\theta' F}{H}\right)}.$$

Se ora si suppone un altro elevatore simile al precedente in cui le linee analoghe crescano in ragione di n a 1, potrà cangiarsi F in n^3F; H in n^2H

$$u' = \sqrt[3]{\left(\frac{n\theta' F}{H}\right)} = u\sqrt[3]{n}$$

In quest'equazione fo per esempio $n = 5$; suppongo cioè un elevatore col diametro di m. 50 e la lunghezza di m. 138,205 capace d'innalzare 1250 uomini per forza motrice; ipotesi assurda come ognun vede. Ciononostante la velocità media ottenibile, non è approssimativamente che

$$u' = 1{,}71.u = 1{,}71 \times 2{,}863 = 4^m{,}895;$$

cioè tuttora inferiore alla velocità d'una brezza ordinaria, ed affatto impotente a lottare con dei venti forti od impetuosi. Se ora si riflette che il motore elicoidale è molto acconcio alla navigazione aerea, potrà forse risultare da quest' ultimo calcolo, per quanto esso siasi d'approssimazione, e da quanto si disse nel §. 5 , l' impossibilità assoluta dell'aeronautica, nello stato attuale del problema, onde servirà desso a confermare quanto venne asserito a proposito di questa scoperta, dalle persone che di essa vollero occuparsi , affine di distogliere l'attenzione degl' inventori di proggetti meccanici , dalla ricerca della sua applicazione al transito ordinario.

Firenze. Marzo 1856.

NOTIZIA SULLE PIU RECENTI SCOPERTE
FATTE INTORNO AGLI ANELLI DI SATURNO.

NOTA

DEL PROF. P. ANGELO SECCHI
Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano.

Da quel tempo, in cui Galileo, il primo tra i mortali, annunziò Saturno essere tricorporeo fino al momento presente, questo pianeta è stato il soggetto più misterioso del sistema solare, e quello intorno a cui si sono concentrate non meno le cure degli astronomi, che le scoperte d'inaspettate meraviglie. Le sue primitive enigmatiche apparenze furono bensì spiegate completamente colla felice teoria di Ugenio, che ne afferrò pel primo la vera cagione col dichiararlo cinto da un sottile anello inclinato all'ecclittica (*anulo cingitur tenui plano nusquam cohoerente ad eclipticam inclinato*); ma nuovi perfezionamenti portati agl'istrumenti dal famoso Campani fecero vedere al Cassini l'anello esser doppio. Herschel coi suoi giganteschi telescopi confermò le scoperte di Cassini, arricchì il pianeta di nuovi satelliti, scoprì la rotazione dell'anello, e provò la sua somma sottigliezza. Il perfezionamento dei refrattori acromatici svelò altre particolarità interessanti, sfuggite agli anteriori osservatori. Gli anelli si riconobbero essere listati da strisce di diversa tinta, che li facevano credere suddivisi in altri minori, e si riconobbe in modo sicuro non essere essi concentrici al pianeta.

In questi stessi ultimi anni nuovi studî condussero a nuove scoperte importantissime. Dai signori Bond a Cambridge in America e Dawes in Inghilterra nel 1849 fu scoperto da ciascuno di essi indipendentemente un terzo anello di debolissima luce situato nell'interno degli altri due già no-

minato anello *nebuloso*, e venne così spiegata la curiosa apparenza di una grande sfumatura nell' interno dell' anello annunziata già dal sig. Galle di Berlino, ma che era passata senz'attrarre l'attenzione degli astronomi. È cosa sorprendente al certo che una tale novità sia restata per tanto tempo senza essere debitamente riconosciuta, onde molti sono stati tentati di credere quest'anello di recente formazione. Se non che le osservazioni di Galle, e le figure antiche di Campani, che io ho ritrovato, fanno conoscere che realmente quest' anello ha sempre esistito da che si è osservato Saturno con istrumenti competenti, e che si è manifestata la sua presenza in una specie di traccia più cupa che esso lascia colà ove passa avanti al pianeta, e che da' meno pratici si è scambiata spesso coll'ombra gettata dall' anello sul pianeta stesso.

Sulla forma però della sezione degli anelli, ossia della loro curva generatrice non si aveva ancora nessun dato diretto di osservazione che ne indicasse la natura. Solo si sapeva che esso era sottilissimo, e che durante il tempo in cui dalla terra si vede di taglio, esso svanisce in tutti i telescopi minori, restando solo visibile in pochi istrumenti colossali. Diversi fenomeni però osservati nel momento della sua disparizione, quali erano lo svanire di un'ansa e poi dell'altra, e sembrare esse raccorciate indicavano delle irregolarità non dubbie nella sua spessezza. La Place per comodità di calcolo assunse, che la curva generatrice fosse una ellisse assai compressa.

La prima osservazione diretta a scoprire la natura della curva generatrice fu, per quanto io sappia, quella che feci io stesso nella sera del 23 Novembre 1850, nella quale col refrattore di Cauchoix mi accorsi che l'ombra del pianeta gettata sull'anello non era terminata da linea curva rivolgente la sua concavità all'interno, cioè verso il globo, qual' è il caso dell'ombra di una palla su di un piano, ma in-

vece che essa ombra rivolgeva la sua convessità verso la palla medesima.

Questo fatto avverato allora da diversi, lo fu tra gli altri, anche dal sig. Lassel a cui ne diedi parte immediatamente. Ma la maggior parte degli astronomi si trovò perplessa, e chi negò il fatto, chi non potendo negarlo l' attribuì ad illusione ottica, cosa non nuova ad avvenire nelle scoperte difficili; allegando come obbiezione principale la grande sottigliezza dell'anello che sembra dover rendere impossibile il vedervi tale curvatura. La questione rimaneva quindi irresoluta, finchè nell' anno scorso io era in istato di osservare Saturno col magnifico refrattore di Monaco di 9 pollici di apertura, e dopo aver molto fluttuato, riconobbi esser manifesta la verità della curvatura dell'ombra, quando questa era assai esile; ma divenir dubbiosa, e parere anzi il contrario, quando essa era assai sviluppata. Onde io non dubitai mettermi dal lato di quelli, che credevano ciò una illusione. A questa conciliazione venni condotto dall'apparenza dell' ombra quale si manifestava specialmente verso l' Aprile del 1855 durante il qual tempo l'ombra sviluppata di vantaggio presentò sempre la concavità verso il pianeta, benchè fosse apparsa curvata in verso opposto quando era più piccola. Era però necessario continuare le osservazioni per aver conferma del sì o del nò, ma diverse altre occupazioni me ne distrassero. Se non che proseguendo anche per quest'anno nuovamente tali ricerche sono stato sorpreso al vedermi di nuovo ricondotto alle mie viste di prima, e con piacere vedo anche altri illustri astronomi confermare questo risultamento interessante. Se non che a fare svanire le apparenze contradittorie ho trovato necessario distinguere tre periodi, in cui si manifesta l'ombra: 1.° quando essa è assai piccola, e in cui la differenza di longitudine eliocentrica della terra e del pianeta è piccolissima 2.° un periodo intermedio. 3.° quella in cui il pianeta stà presso le quadrature.

Nel primo periodo l'ombra presenta un becco rovescio assai marcato da ambedue le parti del vertice del pianeta. Nel secondo lo sviluppo dell'ombra assorbe in tutto quel becco, e sembra realmente *concava verso il pianeta*. Nel terzo finalmente non ritorna il beccuccio di prima, ma tutta l'ombra sembra leggermente curvata all'infuori. Questo è il caso attuale del momento in cui scrivo, in cui la curva dell'ombra è come nella figura



Bisogna dunque distinguere i tempi, e tutto sarà ben chiaro. Per comprovare ciò esperimentalmente a me, e ad altri ho ripreso un modello di Saturno, costruito già tempo fà per quest'uso, ed ho trovato che la proiezione dell'ombra varia precisamente nel modo anzidetto, percorrendo tutte queste fasi secondo l'elongazione relativa dei due corpi terra, e pianeta veduti dal sole.

In quanto all'obbiezione fatta sulla sottigliezza dell'anello, essa non solo non è contraria, ma favorevole all'ipotesi. Si faccia infatti questo sperimento: Si metta una palla in modo che getti ombra sopra un cartone piano, essa avrà la sua ombra sempre concava verso il globo; se venga curvandosi leggermente il cartone l'ombra si piega, e arriva un punto in cui essa si vede curva in senso opposto, ogni qualvolta l'occhio sia fuori della linea retta del raggio luminoso che unisce la palla ed il lume, quando la linea visuale fa un angolo col raggio illuminante. Una curvatura leggiera è dunque sufficiente a mostrare il fenomeno. Nel modello da me usato la freccia di curvatura non supera $\frac{1}{15}$ della larghezza dell'anello B, ed il fenomeno si manifesta in un grado

visibilissimo. Ora l'anello B è largo circa 4''.5. onde la sua spessezza basta che sia $=\frac{9''}{15}$, cioè $\frac{3}{5}$ di secondo, e sono sicuro che anche una curva la metà minore, darebbe effetto sufficiente.

Ma la forma dell'ombra ci mostra anche un altro fenomeno interessante, ed è che il piano dei due anelli non è identico. La forma che dò nella figura superiore fa vedere che l'ombra è bruscamente interrotta, e che può vedersi al di là della punta del globo l'ombra nell'anello. Ora (11 Aprile 1856) la terra è alta pel piano dell'anello 27° 2' e il sole solo 26°.27' la differenza è di 35' e ciò è sufficiente perchè possa scorgersi il limite dell'ombra al di là del globo, come un filo finissimo, benchè a dir vero richieda buone circostanze atmosferiche perchè il globo lassù è assai oscuro. La discontinuità così marcata dei due contorni mostra che l'anello esterno è colà più sollevato dell' interno. Per singolare che paia questa conseguenza, non è sorprendente. Studiando con cura la larghezza della divisione tra gli anelli B e C ho veduto talora distintamente non solo io, ma altri ancora, che essa era più larga notabilmente dalla parte che era al di là del pianeta, che da quella che stava al di quà verso l'osservatore, onde si riconferma il dislivello dei piani.

Se non chè sull'anello stesso B appare talora il contorno dell'ombra essere irregolare, e storto in molte guise talchè mostra esser essa proiettata su una superficie dell' anello assai ineguale. So che molte illusioni possono nascere dal moto dell'aria atmosferica, che produce degli storcimenti in non pochi degli oggetti quando non è tranquilla, ma io non ho mai valutate le osservazioni fatte in circostanze equivoche, e parlo solo dei risultati ottenuti in circostanze favorevolissime. Queste non sono frequenti, e quindi se le osservazioni sono poche, procuro almeno che sieno sicure.

Un'altra cosa che mi è venuta osservata, e che trovo

confermata dal sig. Lassel, e dal Cap. Jacob, è che la divisione degli anelli non è nera, ma piuttosto tendente al colore dell'anello nebuloso interno. Onde è probabile che l'anello sia tutto involto in nebulosità semitrasparente. Quest'ultima non è mera congettura, ma abbiamo nella scienza un fatto, che finora è restato senza spiegazione, e che così potrebbe riceverla assai bene. Questo é che quando l'anello sparisce pel passare che fa il suo piano per la terra, allora sopra Saturno si vede una fascia di colore assai oscuro. Questa fascia notata dal Cassini, dallo Schmidt e da altri non può essere l'anello ordinario, perchè allora non si vede che a grande stento nei fortissimi istrumenti, e questa zona è al contrario assai *larga* e fu visibile fino dai primi istrumenti. Mi pare quindi ragionevole il dire che essa è certamente formata dall'anello e dalla sua atmosfera inviluppante, che si proietta così sopra il pianeta, e vi produce una zona oscura, come fa attualmente l'anello nebuloso. Studi diretti a riconoscere la verità di tale ipotesi si potranno fare nell'epoca della futura disparizione. Il Cap. Jacob crede aver veduto l'ombra anche ben definita sulla divisione, e talora è sembrato ciò pure a me, e specialmente, l'opposizione poco dopo l'ombra era distinguibile pell'anello nebuloso, ma ora é assai difficile il riconoscerla distintamente.

Per conchiudere rapporto alle variabilità delle apparenze di Saturno, dirò, che più d'una rimane ancora problematica : questa è che l'orlo interno dell'anello B si vede spesso più lucido della zona prossima esteriore immediatamente congiuntagli, ma ciò non è costante; almeno in ottime circostanze atmosferiche, e in cui si vedeva nettamente separato l'anello nebuloso dagli altri due, tal maggior luce all'orlo interno non era sensibile. Onde questo pare ancor esso assai variabile.

Le credute suddivisioni degli anelli restano ancora pro-

blematiche. Gli anelli sono certo costituiti a scaglioni, e me ne avvidi fino dal 19 novembre 1854, mentre era ignaro che il sig. Dawes avesse fatto tale scoperta. L' anello interno va degradando in luce dall'esterno all'interno, mentre nell'anello esterno avviene il contrario. La riga più oscura principale, che divide l' anello esterno in due, è spesso così viva che è misurabile, ma oltre questa ne ho scoperta una più sottile assai, e più interna. Gli orli dell'anello A sono all'esterno assai sfumati, il che forma un soggetto di difficoltà nella misura del suo diametro come vedremo fra poco.

Ma lo studio di questo pianeta ricevette l'anno scorso un nuovo impulso all'occasione di un dotto lavoro pubblicato dal sig. O. Struve di Pulcowa, nel quale oltre aver dato un erudito conto di quanto erasi fatto dagli antichi, e moderni per lo studio di questo sistema, dal confronto delle proprie osservazioni colle altrui arriva alla singolare conseguenza, che l'anello andrebbe ora accostandosi rapidamente al pianeta, talchè potrebbe darsi il caso che noi un giorno vedessimo questo bel globo spoglio di tale interessante accessorio. Quest'annunzio, dovea, com' è naturale, eccitare un gran numero d'astronomi a ripetere le misure di Saturno, ed io stesso prevalendomi degli strumenti che sono a mia disposizione credetti non dover lasciar passare l'occasione propizia della prossima opposizione, e massima apertura dell'anello.

Il sospetto di qualche variazione non è irragionevole, giacchè non è punto provato *a priori* che quel sistema sia arrivato ad una completa stabilità. Estraggo dal lavoro citato del sig. O. Struve il seguente quadro, che può dare un idea di quello che dico.

TAV. *A*.

Osservatore	Epoca	Diam. est d. Anello esterno	Diamet. Equat. d. pianeta
Huyghens	1657	45″	18″
Cassini	1691	45	
Pound	1719	42	18
Bradley	1719	41,25	17,75
Rochon	1777	40,6	16,9
Herschel W.	1791	46,68	
W. Struve	1826	40,10	17,99
Bessel	1831	39,31	17,05
Encke	1837	40,93	17,68
Galle	1838	40,90	17,91
O. Struve	1851	39,70	17,61
Lassel (V. As. Nach. n. 856)	1853	40,88	17,45

Lasciando anche da parte le misure di Huyghens, di Cassini, e d'Herschel che possono esser sospette, si vede che nelle altre vi sono diversità superiori a quelle, che possono ammettersi come accidentali secondo gli strumenti impiegati, e l'abilità di chi ha fatto tali misure. Struve e Bessel, l'uno coll'Equatoriale di Dorpat, l'altro coll'Eliometro di Koenisberga differiscono di quasi un secondo (0″.79). Lassel, Encke, e Galle ancor di vantaggio da Bessel (1″.59).

Colla favorevole occasione adunque dell'opposizione prossima passata nel mese di Decembre, in cui abbiamo avuto eccellenti serate ho fatto una serie di molte osservazioni, delle quali ecco i risultati ottenuti, ridotti tutti alla distanza media di Saturno dal sole, il cui logaritmo =0.9796.488.

Non si sono applicate le correzioni delle refrazioni che sono assai piccole per ragioni che sono indicate nella me-

moria astronomica colle osservazioni originali inserita negli atti dell'Accademia de'nuovi Lincei.

Oggetto misurato	Valore	N.° delle misure.
Diametro esterno dell'anello esterno A.	40″.893	—— 58.
Diametro del mezzo della divisione principale tra A e B.	34. 649	—— 15.
Diametro interno dell'anello interno B..	25. 714	—— 28.
Diametro interno dell'anello nebuloso C.	21. 419	—— 19.
Diametro equatoriale del pianeta. . . .	17. 661	—— 32.
Diametro minore dell'ellisse	18. 814	—— 28.

Si vede di quì che il nostro risultato concorda assai bene con Lassel, Encke, e Galle ma che si scosta da Bessel.

La piccolezza delle misure di Bessel è certamente una cosa assai importante, e tanto più sorprendente, quanto che quest'astronomo ha provato che la differenza di 1″ sarebbe sensibilissima nel suo Eliometro. Le recenti misure di M.r Main fatte a Greenvich col micrometro oculare a doppia immagine, si sono trovate egualmente scarsissime. Onde non può dubitarsi che ciò dipenda dalla diversa chiarezza delle immagini, che è sempre assai minore facendo uso della doppia immagine. Infatti diminuendo l'apertura dell' equatoriale fino a 3 pollici, si hanno gli orli dell' anello esterno assai languidi e sfumati, onde nel sovrapporre le immagini raddoppiate è facile che si ecceda, e quindi si abbia un risultato minore del vero. Anche la semplice minore apertura dello strumento può fare lo stesso effetto, e questa forse è la ragione, che nelle moderne ricerche del sig. Jacob il valore é un poco minore, avendo usato un refrattore di soli 6 pollici (*A.S. Month. noticee*, vol. XVI. N.° 5, pag. 125 March. 1856). All'incontro le grandi dimensioni dei primi scopritori si sono attribuite all'irradiazione. Ma non so con quanto fondamento. È un fatto vero e noto

che a pari dimensioni un oggetto luminoso pare più grande di un altro eguale ed oscuro, qualora si guarda direttamente, e anche coi cannocchiali succede lo stesso: ma non per questo ne segue che *misurando* l'oggetto, questo si trovi più grande del vero. Un esempio del primo fatto l'abbiamo in Marte, nel quale sono, come è noto, due macchie polari assai vive (*), le quali, guardandole con un cannocchiale di un ingrandimento mediocre, sicchè la luce resti ben vivace, paiono due segmenti sporgenti dal pianeta, ma con uno assai forte che indebolisca la luce ciò non ha luogo, e nel caso del nostro istrumento la forza di 760 o 1000 volte basta a distruggere completamente l'illusione. Un altro caso d'illusione si trova nel giudizio delle *grandezze a stima* fatte nel campo del cannocchiale. Io stesso più volte mi sono ingannato grandemente nello stimare le distanze dei satelliti del pianeta Saturno, giudicandole minori del vero, quando le valutava in larghezze dell'anello; onde spesso prendeva il terzo pel secondo e il quarto pel terzo. Ma venendo alle misure l'errore si rettifica immediatamente. Per fare una prova diretta, ho fissata a grande lontananza una tavola su cui erano dipinti due circoli uno bianco in fondo nero; e uno nero in fondo bianco. Questi a stima parevano diversi, ma la misura smentiva tale giudizio e si trovavano realmente uguali. Dal che ne inferisco che l'irradiazione poco può influire sulle misure, ma si vede bene che non è indifferente la quantità di luce che ammette lo strumento. Oltre l'irradiazione nei cannocchiali vi è la diffrazione, che ingrandisce le immagini delle stelle. Una stella di 1ª grandezza che coll'obbiettivo interamente scoperto ha un disco che è una frazione di secondo in diametro, con

(*) Le chiamo macchie polari per seguire l'uso comune, del resto una di esse l'australe è certamente eccentrica all'asse di rivoluzione del pianeta.

un diaframma di 2 pollici arriva a 4″ circa. Per Saturno non ha certo luogo un ingrandimento sì grande , e se vi ha qualche dilatazione essa è compensata dalla minor luce che ha l'orlo dell'anello, onde il suo diametro resta diminuito per mancanza di lume.

Lo scopo che io mi era prefisso nell'intraprendere queste misure pareva così almeno in parte raggiunto, se non che la discussione accurata delle medesime mi fece vedere tali discrepanze nei risultati ottenuti da una sera all'altra, che più volte ne stetti in grande ansietà: e ciò tanto più mi rendeva sollecito quanto che io vedeva i medii delle diverse sere discordare tra di loro notabilmente , più che i medii della sera medesima. I numeri che dò nella colonna 5ª della tavola B quì appresso, daranno un' idea di tali divergenze. Esse erano tanto più inesplicabili che con Giove, il quale pure ha un diametro apparente maggiore di quello dell'anello, non ne aveva avuto di eguali, e che per sottrarmi da ogni specie di errore sistematico aveva variata la maniera di misurare facendolo per parti, e mutando gl' ingrandimenti. È vero che vi sono delle difficoltà non piccole nell'anello, ma quando l' aria è buona , e l' orologio porta bene lo strumento, l'errore probabile di un'osservazione non supera 0″.15. Di più avevamo nelle misure stesse una riprova della loro bontà, perchè avendo misurato l'anello, e insieme il pianeta, le misure di questo si trovavano sommamente concordi, e lo stesso avviene tra gli osservatori diversi.

Sospettai adunque che queste varietà fossero reali, cioè inerenti all'anello e mi c'indussero le seguenti ragioni :

1.° Il vedere che queste irregolarità passavano dal massimo al minimo dentro un determinato periodo : così in misure prese in due giorni consecutivi, si ha discordanza, mentre dopo tre giorni si ha accordo, e l'accordo ritorna quasi interamente dopo 9 giorni. Questo si vede a colpo

nella seguente tavola:

	Intervalli	Differenze	
1° giorno	14—15 Dicembre	0, 39	medio 0,523
	15—16	0, 63	
	23—24	0, 55	
2° giorno	27—30	0, 09	medio 0,05
	27—24	0, 01	
3° giorno	14—5	0, 26	medio 0,15
	23—14	0, 05	

In 2.° luogo i massimi molto si accostano tra di loro e i minimi pure:

Massimi		Minimi	
41, 324	medio	40, 564	medio
444	41,275	412	40,542
115		710	
205		483	

Medio dei massimi = 41, 275
. . . . dei minimi = 40, 542

Differ. . . . 0, 733
½ Diff. . . . 0, 366

Ciascun vede se sia tollerabile una tal differenza tra osservazioni di questa specie con tale istrumento; né solo le mie, ma anche quelle di Lassel (le sole che fino allora aveva potuto consultare per esteso) erano soggette allo stesso difetto, di un salto di oltre a mezzo secondo netto (*).

Nel caso pertanto che le irregolarità fossero reali, restavano due ipotesi da esaminare.

(*) Nel fascicolo del *Monthly notices* della R. Soc. Astronomica di Londra trovo che il Sig. Main pure si lagna di tali divergenze nelle misure, e le crede difficilmente spiegabili con mera casualità. Il salto poi di ½ secondo, e più, si riproduce anche nelle misure del Sig. De la Rue: ma il non trovare indicata l' ora ci priva di una preziosa conferma delle nostre viste teoriche.

La 1.ª se l'anello fosse soggetto ad una dilatabilità periodica.

La 2.ª Se esso fosse di figura ovale, e che ora mostrasse a noi l'asse maggiore ed ora il minore.

La 1.ª ipotesi pare alquanto meno probabile benchè non priva di fondamento, giacché l'asse coniugato dell' anello viene trovato bene spesso maggiore quand'è in eccesso il trasverso : ma ciò non è costante, e non devo dissimulare che le osservazioni in questa direzione meritano minor peso ; perchè l'agitazione dell'aria molto confonde nella misura di una linea di contatto di così debole curvatura come sono gli estremi dell'asse coniugato dell'anello.

Tuttavia non credo doversi rigettare questa ipotesi senza esame, e dirò infine ciò che sento.

L' ipotesi pertanto che io ho creduto dover discutere è la seconda, cioè che l'anello sia ovale, ed avendo una rotazione, presenti a noi ora un diametro maggiore, ora un minore. Sia T il tempo di questa rotazione, e t il tempo scorso da un' epoca assunta per principio di numerazione in cui l'anello sia per certo in un minimo di diametro apparente : k la differenza tra il semiasse maggiore a, e il minore b, avremo la correzione da farsi al diametro osservato per avere il medio della formola

$$c = k \cos 2 \left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

ossia chiamando n il numero delle rivoluzioni fatte dall'anello nel tempo t, ed ω l'arco residuo descritto oltre il numero intero delle mezze circonferenze sarà

$$c = k \cos . 2\omega$$

essendo anche senz'altro calcolo evidente , che durante il tempo di un intera rivoluzione, l'anello si presenta due volte nella posizione sì del massimo e sì del minimo diametro apparente.

La determinazione di T sarebbe stata assai difficile dietro le poche osservazioni che abbiamo, miste, come sono, degli errori di osservazione : quindi per togliere l'indeterminazione di ciò, cercai quale sarebbe il tempo che giusta la terza legge di Keplero dovrebbe impiegare un satellite posto a 20''5 dal primario per compiervi il suo giro, e trovai che era circa di 14^h, 36 di T*m*; con questo dato tentando di soddisfare i periodi osservati, vidi che il numero preferibile era

$$T = 14^h, 238 \text{ di tempo siderale.}$$

Questo è il tempo di un satellite distante un poco più di 20'' cioè posto alquanto nell'interno dell'anello esterno A. In questa discussione però sono stato arrestato da una difficoltà : l'ora dell'osservazione non é notata che entro limiti approssimati cioè di circa 10^m, specialmente nelle prime osservazioni , cioè quanto è sufficiente per trovare la riduzione da farsi alla distanza attuale del pianeta per avere la media, e per la refrazione ; quindi i tempi sono sicuri solo entro tal limite. Al principio dell'anno scorso talvolta l'ora è stata emessa, ma le osservazioni facendosi ad ora, a un dipresso eguale nelle varie sere successive, facilmente si è potuta trovar col confronto delle osservazioni vicine fatte la stessa sera.

Questa inesattezza che finora forse era tollerabile non permette di spingere le verificazioni alla precisione che avrei desiderato : i tempi d'osservazione però che si discutono qui sotto, essendo sicuri entro 10^m , li credo sufficienti. Non veggo che altri astronomi abbiano usato fare di vantaggio , e perciò forse merito scusa , ma ciò servirà di norma a me a agli altri in avvenire. L'errore che può nascere nella rotazione da un errore di 1/4 d' ora di tempo nel momento dell'osservazione è 6° 1/4; ora sono sicuro che trattandosi d'una prima investigazione , ciò non può portare seria conseguenza, nè errore che superi gli errori probabili delle misure stesse.

Nella tavola B quì appresso dò il diametro dell'anello, quale risulterebbe, applicando le correzioni giusta l'ipotesi assunta. Per contare il tempo parto dalla sera 24 Decembre a $4^h\ 10^m$, T. siderale perchè quella sera era esimia, e il diametro era certamente in un minimo di fase. Per valutare la correzione, adopero l'eccesso trovato di sopra tra i massimi e i minimi diametri, e fo $k = 0'',366$.

TAV. *B*.

Data ed ora delle osserv. In tempo sid.	Intervalli In tempo	Intervalli In rivol.	Correz.	Diametro Osserv.	Diametro Corret.	Differenza c—m
1855 30 Nov. $2^h, 30^m$	$24^g+1^h,40^m$	$40\frac{1}{2}^r+23^o$	+0,254	40″, 851	41″, 105	+0,118
5 Dic. 1, 45	19+2,35	32 +76	—0,323	41, 324	41, 001	+0,014
14 3, 0	10+1,10	17 —24	+0,245	41, 068	41, 311	+0,227
15 3, 30	9+0,40	15 +81	—0,348	41, 443	41, 095	+0,108
16 3, 30	8+0,40	$13\frac{1}{2}$+12	+0,334	40, 812	41, 146	+0,159
23 4, 10	1+0, 0	$1\frac{1}{2}$+65	—0,235	41, 118	40, 883	—0,104
24 4, 10	. . .	. .	+0,366	40, 564	40, 930	—0.057
27 3, 40	3—0,30	5 +12	+0,334	40, 412	40, 746	—0,241
» 4, 10	3 . .	5 +20	+0,280	40, 623	40, 903	—0,084
30 3, 50	6—0,20	10 +32	+0,160	40, 710	40, 870	—0,117
» 4, 20	6+0,10	10 +45	0, 0	41, 090	41, 090	+0,103
1856 9 Gen. 5, 28	16+1,18	$27\frac{1}{2}$+20	+0,280	40, 483	40, 763	—0,224

Medio 40, 987 = m

Per una osserv. Err. pr. 0, 101

l' ultima colonna fa vedere quanto piccole siano divenute le divergenze, benchè sussista ancora un eccesso sulla prima parte della serie, e un difetto nella seconda. Quella del 14 dicembre sembra fare eccezione , ma pure essa dà un minimo *relativo* alle vicine, come vuole la formola. L'andare a ricercare più per minuto la causa di queste differenze è inutile senza base di tempi più accurati nell' ore di osservazione, e probabilmente dipende da un altro periodo sovrapposto al primo, o da perturbazione de'satelliti. L'errore probabile di un'osservazione isolata è soddisfacente , e il medio di queste poco differisce dal medio di tutte nella Tav. B.

Se la compensazione di tali errori fosse casuale sarebbe forse un fenomeno assai più singolare che non la rotazione, e l'ellitticità dell' anello; tuttavia senza dar nulla per dimostrato, basterà questo per indicarci una nuova cautela da prendere in misurare i diametri, cioè di tener conto preciso del tempo. Le osservazioni di Lassel hanno diametri discordi a quattro giorni d' intervallo , e concordi a tre giorni, il che combina con noi, ma danno valore concorde per un giorno, benchè non esattamente. Questo può parere in opposizione colla nostra teorica, ma non lo è, giacchè è da avvertire che se una delle osservazioni non cade in un punto estremo di massimo o minimo ma in un intermedio, l'altra dopo 24 ore pure cadrà in un punto intermedio, e quindi potrà restare nascosto l'eccesso o la differenza; ma nemmeno esso dando l'ora, nulla di sicuro può concludersi.

Quindi parmi probabile la prefata ipotesi e degna che gli astronomi forniti di forti strumenti la prendano in considerazione.

Ho promesso di discutere l'altra ipotesi della variazione reale del diametro dell'anello. La prima cosa da cercare è se la divisione abbia mutato sensibilmente di luogo. Essendo essa un oggetto assai netto e distinto e di facile col-

limazione, molti errori accidentali restano eliminati, e perciò merita di esser presa per termine di confronto, a preferenza di altri punti.

Si è trovato per medio del diametro di tal divisione 34,649, aggiungendo la larghezza della divisione medesima, che dal confronto della grossezza dei fili del micrometro a più riprese ho concluso 0″, 402 resta per

Diametro interno dell'anello esterno 35″, 051.
W. Struve dava (*) , ... = 35, 289

La differenza di 0″, 238, non mi par punto trascurabile in un punto in cui si collima sì bene; e quel che è rimarchevole Struve supera noi. Però devo dire che la divisione non pare sempre egualmente larga. È ciò forse per le circostanze atmosferiche, o per una reale variabilità ? (**)

La larghezza dell'anello esterno A è per noi

dal medio di tutte		=	2, 92
Secondo W. Struve	1826 . .	=	2, 40
Encke	1837 . .		2, 62
O. Struve. . . .	1851 . .		2, 30

cioè tutte minori dell'attuale.

La sera dei 29 dicembre fui sorpreso di vedere l'anello esterno di una larghezza fuor del solito maggiore, e tanto che, ad occhio, scorgevasi una differenza notabile di esso colle figure fatte con tanta precisione da Dawes e Lassel: trovai quanto segue misurando l'ansa destra con tre ripetizioni molto concordi.

(*) Astr. Nach. n.° 139.

(**) Il Sig. De la Rue opina che le variazioni sieno reali. M. Not. Marzo 1856.

Larghezza di A e B	= 7″, 512
quindi Anello interno + ½ div.	= 4, 523
Anello esterno + ½ div.	= 2, 989
½ div.	= 0, 201
resta : Anello esterno	= 2, 788
Medio di W. Struve, Encke, O. Struve . .	= 2, 440
	Diff. 0, 348

Da questo risultato pare fuor di dubbio una variabilità nell'anello esterno, e nella sua larghezza.

Ma la larghezza complessiva dei due anelli é costante? il medio delle nostre osservazioni dà per larghezza media delle anse 7, 589
mentre da O. Struve é dato 7, 415
con differenza assai piccola di 0, 174

Resta ora a vedere se siasi cambiato il rapporto tra la distanza dell'orlo interno dell' anello B. dal pianeta, e la larghezza degli anelli stessi.

La distanza dell'orlo interno dell'anello al pianeta	= 4″, 026
La larghezza degli anelli	= 7, 589
Il rapporto della 1ª alla 2ª di queste quantità .	= 0, 53
Questo sarebbe secondo O. Struve	= 0, 57
Encke e Galle . .	= 0, 57
W. Struve	= 0, 64
Bradley	= 0, 95
Huyghens e Cassini .	= 1, 18

Pare che siavi una diminuzione, benchè non così forte come ha prodotto O. Struve. Bisogna però concedere che queste misure sono assai difficili per la variabilità della terminazione dell'anello interno, che talora è ottima, ma talora è incerta, e l' occhio è perturbato per la vivacità

maggiore della luce dell'anello nebuloso con cui confina, onde è facilissimo fare le misure dell'anello interno in eccesso, e quindi che risulti minore il rapporto citato.

È noto essersi mostrato talora nell'anello una eccentricità relativa al pianeta: ho cercato se questa fosse sensibile, e la sera del 27 dicembre certo era nulla: ma non così può dirsi della larghezza delle anse che avevano una differenza sensibile. Ecco le misure originali

	Ansa precedente		Ansa seguente
dopp. mis.	1′, 178	. . . .	1, 196
	1, 178	. . . .	1, 197
	1, 177	. . . .	1, 197
Ridotte	8″, 605	. . . .	8″, 751

Questa differenza è piccola, ma per l'accordo delle misure dirette non è trascurabile, e non è da omettere d'investigarla meglio. Posteriormente ho fatto qualche altra osservazione, e nella sera del 16 gennaio ottenni T. s. $6.^h\ 10^m$.

Ansa precedente = 8″, 137.
Ansa seguente = 8, 323.
} diff. 0.186, che non è punto trascurabile.

Dalle ricerche finora esposte pare potersi concludere che l'anello, oltre una rotazione ed una ellitticità, ha realmente qualche varietà periodica di diametro assoluto. Queste periodicità possono far cessare i timori di veder presto spogliato il pianeta di questo bell' accessorio, benchè se vogliamo stare alle antiche osservazioni vi appaia un ristringimento. Prima però di ammettere questo come reale, parmi miglior consiglio aspettare nuove ricerche. Infatti per quanto si vogliano stimare le osservazioni di Ugenio, non può negarsi che esse sieno un poco difettose, come apparisce dai limiti che egli assegna ai diametri di Giove. Egli stesso benchè lodi i suoi cannocchiali accenna però nel *Systema Saturnium* che altri ha veduto il pianeta meglio di lui. Forse allude all'os-

servazioni del Divini e del Campani allora celebri ottici. La figura di quest'ultimo osservatore, che io ho per così dire disseppellita, è di somma importanza. È singolare che assumendosi per diametro del pianeta 17″, 8 trovasi per quello dell'anello 39″, 67 che è molto vicino al vero, onde la figura vedesi fatta con gran precisione : ora in essa la larghezza dell' anello sta alla larghezza dello spazio oscuro :: 5, 44 : 66, 0 ben diverso dall'attuale. Notisi che nella figura del Campani vedesi traccia dell'anello nebuloso, e la minor luce all'orlo esterno dell'anello ; cose tutte che mostrano la precisione del disegno, onde merita molta considerazione ; e può far sospettare che abbiano avuto luogo realmente delle mutazioni; ma cercando d'imitare i cannocchiali del Campani, cioè mettendo un piccolo diaframma all'obiettivo del refrattore di Merz, e usando ingrandimento debole di 100 volte, benchè a me , e ad altri pratici dell'oggetto paresse l'anello più largo dell'intervallo oscuro, pure una persona non pratica giudicò francamente il contrario : sarebbe ciò il caso de'primi osservatori ? Notai per certo che così la luce agli orli dell'anello , e specialmente dell'interno resta grandemente indebolita, il che può farlo parere più stretto.

CONCLUSIONI

Riepilogando il detto finora possiamo riassumere quanto segue :

1.° Che la superficie dell'anello non è piana.

2.° Che le varie zone o anelli staccati non sono nel medesimo piano.

3.° Che gli anelli hanno ciascuno una rotazione indipendente.

4.° Che sono soggetti a notabili cambiamenti, e tali da farli paragonare, piuttosto ad una massa di fluidi elastici analoghi alle nostre nubi, o alle comete, che ad un vero corpo solido.

Roma 14 Aprile 1856.

SOPRA UNA FORMOLA DI TRASFORMAZIONE PER LE SERIE DOPPIAMENTE INFINITE.

NOTA

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.

1.° Rappresentino m_1, $m_2 \ldots m_n$, n quantità le quali ponno assumere tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$; p_1, $p_2, \ldots p_n$; μ_1, $\mu_2 \ldots \mu_n$ $2n$, quantità eguali a zero od alla unità.

Posto:

$$h = p_1 m_1 + p_2 m_2 + \ldots + p_n m_n$$

$$c_r = u_r + \sum_1^n {}_s (2m_s + \mu_s) a_{r,s}\,,\quad \varphi = r_1 c_1^2 + r_2 c_2^2 + \ldots + r_n c_n^2$$

(r_1, $a_{r,s}$ quantità costanti); considero la funzione ad n argomenti u_1, $u_2 \ldots u_n$ seguente:

$$(1)\qquad e^{r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \ldots + r_n u_n^2} \mathrm{P}(u_1, u_2, \ldots u_n) = \mathrm{S}(-1)^h . e^\varphi\,;$$

indicando col simbolo S la somma di tutte le espressioni, che si ottengono col dare alle m_1, $m_2 \ldots$, che entrano a formare la $(-1)^h e^\varphi$, tutti i valori suddetti.

Se nella equazione (1) si pone

$$u_1 + 2a_{1,r}\,,\ u_2 + 2a_{2,r}\,,\ \ldots,\ u_n + 2a_{n,r}$$

in luogo di u_1, $u_2 \ldots u_n$ si ottiene:

$$e^{\sum_1^n {}_s r_s (u_s + 2a_{s,r})^2} \mathrm{P}(u_1 + 2a_{1,r}\,, u_2 + 2a_{2,r} \ldots u_n + 2a_{n,r})$$
$$= (-1)^{p_r} \mathrm{S}(-1)^h e^\varphi\,;$$

quindi se $p_r = 0$ la funzione primo membro della (1) ammetterà il gruppo di indici di periodicità:

$$2a_{1,r}\,,\ 2a_{2,r}\,\ldots\,2a_{n,r}$$

e se $p_r = 1$ la funzione medesima ammetterà il gruppo di indici di periodicità:

$$(2)\qquad 4a_{1,r}\,,\ 4a_{2,r}\,\ldots\,4a_{n,r}\,.$$

Ne risulta che la funzione (1) ammetterà gli n gruppi di indici di periodicità che si deducono dal gruppo (2) ponendo $r = 1\,,\ 2,\ldots n$.

2.° La espressione del secondo membro della equazione (1) si può trasformare applicando opportunamente i metodi dati recentemente dai sigg. Meissel ed Enneper per trasformare espressioni di forma analoga (Journal de Crelle T. 48. Quarterly Journal. Dec. 1855). Non faremo quindi che esporre il risultato.

Sia

$$\Delta = \sum(\pm a_{1,1}\,,\ a_{2,2}\,\ldots\,a_{n,n})\,,\quad \alpha_{r,s} = \frac{d\Delta}{da_{r,s}}$$

$$\gamma_s = \frac{\pi}{4}\sum_{1}^{n}{}_r(2m_r + p_r)\alpha_{s,r} - i\Delta r_s\, u_s \quad (i = \sqrt{-1})$$

e:

$$\psi = \frac{1}{r_1}\gamma^2{}_1 + \frac{1}{r_2}\gamma^2{}_2 + \ldots + \frac{1}{r_n}\gamma^2{}_n$$

$$k = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots + m_n\,\mu_n\,.$$

La formola di trasformazione è la seguente:

$$\frac{i^n\,\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\Delta\sqrt{(r_1r_2\ldots r_n)}}\ S(-1)^k e^{\frac{1}{\Delta^2}\psi} = e^{-\sum_1^n{}_s r_s\,u^2{}_s}S(-1)^h\,e^{\varphi}$$

ossia osservando alla (1):

$$(3)\qquad P(u_1\,,\,u_2\ldots u_n) = \frac{i^n\,\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\Delta\sqrt{(r_1r_2\ldots r_n)}}\ S(-1)^k\ e^{\frac{1}{\Delta^2}\psi}\,.$$

Ora se in questa equazione in luogo delle u_1, $u_2 \dots u_n$ si sostituiscono le :

$$u_1 + 2A_{1,r}\,,\ u_2 + 2A_{2,r} \dots\dots u_n + 2A_{n,r}$$

essendo :

$$(4) \qquad A_{s,r} = \frac{\pi i}{4\Delta r_s}\alpha_{s,r}$$

si ottiene :

$$P(u_1 + 2A_{1,r}\,,\ u_2 + 2A_{2,r} \dots u_n + 2A_{n,r})$$
$$= (-1)^{\mu_r} P(u_1\,,\ u_2 \dots u_n)$$

Per cui le funzioni $P(u_1\,,\ u_2 \dots\dots u_n)$ ammetteranno gli n gruppi di indici di periodicità che si deducono dal gruppo:

$$4A_{1,r}\,,\ 4A_{2,r} \dots 4A_{n,r}$$

ponendo in esso $r = 1\,,\ 2, \dots n$.

Quindi il rapporto fra due qualsivogliano funzioni del tipo (1) ammetteranno i $2n$ gruppi di indici di periodicità superiori.

3.° Osservando all'equazione (4) è evidente che gli indici $A_{s,r}$ dei secondi gruppi sono dipendenti dagli indici $a_{r,s}$ dei primi. Dalla medesima equazione si possono dedurne moltissime altre le quali manifestano il legame fra i primi e i secondi indici. Fra queste equazioni noteremo le :

$$a_{s,1} A_{s,1} + a_{s,2} A_{s,2} + \dots + a_{s,n} A_{s,n} = \frac{\pi i}{4r_s}$$
$$a_{r,s} A_{s,1} + a_{r,2} A_{s,2} + \dots + a_{r,n} A_{s,n} = 0$$

e le :

$$r_1 a_{1,s} A_{1,s} + r_2 a_{2,s} A_{2,s} + \dots + r_n a_{n,s} A_{n,s} = \frac{\pi i}{4}$$
$$a_1 a_{1,r} A_{1,s} + r_2 a_{2,r} A_{2,s} + \dots + r_n a_{n,r} A_{n,s} = 0\,;$$

inoltre le :

$$A_{s,r}\,\alpha_{s,t} - A_{s,t}\,\alpha_{s,r} = 0\,, \quad r_s\,A_{s,t}\,\alpha_{t,r} - r_t\,A_{t,r}\,\alpha_{s,r} = 0$$

e da ultimo indicando con ∇ il determinante:

$$\sum(\pm\, A_{1,1}\, A_{2,2} \ldots A_{n,n})$$

si ha:

$$\nabla = \frac{\pi^n . i^n}{4^n . \Delta r_1 r_2 \ldots r_n}\,.$$

4.° Da quest'ultima equazione si ottiene facilmente:

$$\sqrt{\frac{\nabla}{\Delta}} = \frac{i^{\frac{n}{2}}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \Delta \sqrt{(r_1 r_2 \ldots r_n)}}$$

per la quale la (3) assume la forma:

$$P(u_1\,,\,u_2\,,\ldots u_n) = i^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{\nabla}{\Delta}}\, S(-1)^k\, e^{\frac{1}{\Delta^2}\psi}$$

Si sostituiscano in ψ per $\alpha_{s,r}$ i valori dati dalla (4); si avrà:

$$\gamma_s = \frac{\Delta r_s}{i}\Big((2m_1 + p_1)A_{s,1} + \ldots + (2m_n + p_n)A_{s,n}\Big) - i\Delta r_s u_s$$

ossia posto:

$$iA_{s,r} = a'_{r,s}$$

e:

$$\delta_s = \sum_{1}^{n}{}_r (2m_r + p_r)a'_{s,r} + iu_s$$

si otterrà:

$$\gamma_s = -\Delta r_s \delta_s$$

da cui

$$\psi = \Delta^2(r_1\,\delta^2{}_1 + r_2\,\delta^2{}_2 + \ldots + r_n\,\delta^2{}_n) = \Delta^2\omega\,.$$

Ne risulta che:

$$P(u_1\,,\,u_2 \ldots u_n) = i^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{\nabla}{\Delta}}\, S(-1)^k\, e^{\omega}\,.$$

Si osservi che la ω è della stessa forma della φ, e si ottiene da questa ponendo iu_s in luogo di u_s; $a'_{r,s}$ invece di $a_{r,s}$; e $p_1, p_2, \ldots p_n$ in luogo di $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ e reciprocamente. Indicando quindi con $P_1(u_1, u_2 \ldots u_n)$ quella fra le funzioni (1) nella quale sono permutate le $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ ordinatamente colle $p_1, p_2 \ldots p_n$ si avrà dalla (1) medesima:

$$e^{-\sum_1^n {}_s r_s u_s^2} P_1(iu_1, iu_2 \ldots iu_n, a'_{r,s}) = S(-1)^k e^{\omega}$$

per cui l'equazione superiore diventa la:

$$(5) \qquad P(u_1, u_2, \ldots u_n, a_{r,s})$$

$$= i^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{\nabla}{\Delta}}\, e^{-\sum_1^n {}_s r_s u_s^2} P_1(iu_1, iu_2 \ldots iu_n, a'_{r,s}).$$

Questa è la formola generale per la trasformazione delle funzioni P ad argomenti reali in funzioni delle medesime specie ad argomenti immaginarj.

5.° Suppongasi

$$n = 1, \quad a_{1,1} = \alpha, \quad a'_{1,1} = \alpha_1, \quad p_1 = 1, \quad \mu_1 = 0;$$

saranno secondo i simboli dei *Fund.ª Nova*;

$$P(u) = \theta(u), \quad P_1(u) = H(u + k);$$

inoltre si avranno le:

$$\Delta = \alpha, \quad \nabla = A_{1,1} = \frac{\pi i}{4ar} = -i\alpha_1,$$

ed osservando essere:

$$r = \frac{\pi}{4kk_1}, \quad \alpha = ik_1$$

per cui $A_{1,1} = k$ sarà

$$\sqrt{i} \sqrt{\frac{\nabla}{\Delta}} = \sqrt{\frac{k}{k_1}};$$

e dalla formola (5) deducesi:

$$\theta(u, k) = \sqrt{\frac{k}{k_1}}\, e^{-ru^2}\, \mathrm{H}(iu + k_1, k_1)$$

che equivale alla formola (16) del §. 61 dei *Fundamenta Nova*. Analogamente si ottengono le altre formole del medesimo paragrafo :

Sia

$$n = 2, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 1; \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0;$$

adottando la notazione di Göpel nella Memoria, *Theoriae transcendentium Abelianarum* ec. Si avrà

$$\mathrm{P}(u_1, u_2) = \mathrm{Q}'(u_1, u_2), \quad \mathrm{P}_1(u_1, u_2) = \mathrm{R}''(u_1, u_2).$$

Pongo

$$\left.\begin{array}{ll} a_{1,1} = \alpha_1, & a_{2,1} = \alpha_2 \\ a_{1,2} = \beta_1, & a_{2,2} = \beta_2 \end{array}\right| \begin{array}{ll} \mathrm{A}_{1,1} = a_1, & \mathrm{A}_{2,1} = a_2 \\ \mathrm{A}_{1,2} = b_1, & \mathrm{A}_{2,2} = b_2 \end{array}$$

sarà :

$$\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \qquad \nabla = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\Delta a_1 = \frac{\pi}{4r_1}\beta_2, \quad \Delta a_2 = -\frac{\pi}{4r_2}\beta_1,$$

$$\Delta b_1 = -\frac{\pi}{4r_1}\alpha_2, \quad \Delta b_2 = \frac{\pi}{4r_2}\alpha_1,$$

e supponendo :

$$ia_1 = \alpha', \quad ia_2 = \alpha'', \quad ib_1 = \beta', \quad ib_2 = \beta''$$

si avrà :

$$\mathrm{Q}'(u_1, u_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$$

$$= i\sqrt{\frac{\nabla}{\Delta}}\, e^{-(r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2)}\mathrm{R}''(iu_1, iu_2, \alpha', \alpha'', \beta', \beta'');$$

formola analoga alla data dal Rosenhain al §. 5.° Cap. 2.° della sua memoria, *Sur les fonctions ultra-elliptiques* ec.

Pavia. Maggio 1856.

Fo ristampare qui appresso nel presente fascicolo l'eloquente ed affettuoso discorso pronunziato dal Sig. Agostino Cauchy, in occasione dei funerali del chiarissimo Sig. Binet, membro dell'Istituto di Francia (*Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche*). I sentimenti di cattolica fede e di pietà sincera sono espressi dal Sig. Cauchy in questo discorso, non meno che in altre sue produzioni. (1)

BARNABA TORTOLINI.

DISCOURS DE M. AUGUSTIN CAUCHY.

Messieurs,

La mort vient de ravir à l'Académie des sciences son président; aux membres de l'Institut, aux professeurs du Collége de France, un excellent confrère; à une femme, à des enfants, à une famille éplorée, un père tendrement aimé et digne de l'être; à moi-même, un ancien condisciple et

---

(1) Degnissimi di esser letti sono i due seguenti Opuscoli.

1.° *Alquante parole rivolte agli uomini di buon senso e di buona fede da Luigi Agostino Cauchy, uno dei Precettori del Duca di Bordeaux. Traduzione dal Francese. Modena. Dalla Reale Tipografia Eredi Soliani*, 1834, *in* 8.°

2.° *Considérations sur les Ordres Réligieux, adressées aux amis des Sciences, Par le Baron Augustin Cauchy, Membre de l'Académie des Sciences de Paris, de la Société Italienne, de la Société Royale de Londres, des Académies des Berlin, de Saint—Pétersbourg, de Prague, de Stockolm, de Goettingue, de la Société Américaine, etc. Paris, Librairie de Poussielgue—Rusand, rue Hantefeuille, n.* 9. *A Lyon, Chez L. Lesne*. 1844—in 8.° In un capitolo di quest'operetta intitolato: CHAPITRE VIII. *Le Révèrend Père de la Compagnie de Jesus* (pag. 36) sono posti in piena luce gli eminenti vantaggi resi alla società dalla Compagnia di Gesù.

un ami. Binet a quitté ce monde pour un monde meilleur. En présence de la tombe qui reçoit sa dépouille mortelle, je n'essayerai pas de rappeler les importants travaux par lesquels il a contribué aux progrès de la géométrie et de l'analyse mathématique; il sera plus digne pour lui, plus consolant pour nous d'arrêter notre esprit sur une pensée bien capable d'adoucir nos regrets. Binet n'était pas seulement un géomètre distingué, doué d'une haute intelligence : avec les plus beaux génies des siècles passés et des temps présents, avec les Descartes et les Fermat, avec les Haüy, les Ampère, les Laennec, il aimait à remonter de la connaissance des vérités scientifiques au Principe éternel de toute vérité. La méditation des lois sublimes qui régissent le cours des astres, qui entretiennent l'ordre et l'harmonie dans l'univers, lui offrait sans cesse de nouveaux motifs de bénir et d'adorer l'auteur de tant de merveilles. La foi vive de notre confrère, son ardent amour pour le Dieu auquel il rendait gloire par ses talents et ses vertus, par son vaste savoir et son inépuisable charité, doivent nous inspirer la douce confiance qu'aujourd'hui, plus heureux que nous, plus éclairé que nous, Binet est allé puiser la lumière à la source de toute lumière, apprendre des sécrets que nous sommes appelés nous-mêmes à connaître un jour, en marchant dans la voie qu'il a suivie. Absorbé par ces hautes pensées, vous me pardonnerez, Messieurs, d'en abréger l'expression. La vraie douleur s'exprime en peu de paroles; et, à la vue de la croix posée sur cette tombe en signe d'espérance, je me tais, je vous laisse franchir en esprit l'intervalle immense qui sépare les sciences de la terre, si limitées, si bornées en tous sens, même quand elles sont cultivées par des hommes d'un mérite supérieur, des vérités sublimes, de la divine science, qui nous seront révélées dans les cieux.

SULLA RISULTANTE DI UN NUMERO QUALUNQUE D'EQUAZIONI ALGEBRICHE.

TEOREMA GENERALE

PEL CAV. F. FAA' DI BRUNO.

Siano date le l equazioni omogenee a l variabili x_1, x_2, ... x_l di grado n

$$\varphi_1 = \sum a_{p,q,r,\dots s}\; x_1^p\, x_2^q \dots x_l^s = 0$$

$$\varphi_2 = \sum b_{p,q,r,\dots s}\; x_1^p\, x_2^q \dots x_l^s = 0$$

. . . .

$$\varphi_l = \sum k_{p,q,r,\dots s}\; x_1^p\, x_2^q \dots x_l^s = 0$$

Si scelgano a piacimento in ciascuna equazione l coefficienti, e si formi con essi il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{p'q'\dots s'}, & a_{p''q''\dots s''}, & \dots\dots & a_{p^{(l)}q^{(l)}\dots s^{(l)}} \\ b_{p'q'\dots s'}, & b_{p''q''\dots s''}, & \dots\dots & b_{p^{(l)}q^{(l)}\dots s^{(l)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{p'q'\dots s'}, & k_{p''q''\dots s''}, & \dots\dots & k_{p^{(l)}q^{(l)}\dots s^{(l)}} \end{vmatrix}$$

Questi determinanti saranno in numero eguale a quello delle combinazioni che si possono fare l à l di

$$\frac{n(n+1)\dots(n+l-1)}{1.\ 2.\ 3.\dots l}$$

quantità. Si prendano i medesimi n^{l-1} determinanti qualunque, ma tali che moltiplicati insieme forniscano un prodotto isobarico e di peso n^l relativamente a ciascun indice. Ciò posto, la risultante *sarà la somma di tutti questi pro-*

dotti moltiplicati per convenienti coefficienti numerici, i quali si determineranno per mezzo delle equazioni alle derivate parziali cui soddisfa.

Con quest'occasione è mio dovere di dichiarare, che, essendo stato avvertito il contenuto della Nota inserita in questi Annali (Novembre 1855) già essere stato trovato da Bezout, ne abbandono naturalmente la priorità, contentandomi della soddisfazione d' avere rinvenuto le stesse proprietà, senza averle pria conosciute.

Parigi 31 Luglio 1856.

INTORNO LA INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI IRRAZIONALI.

NOTA

DEL SIG. FELICE CASORATI.

La questione dell'integrazione dei radicali quadrati per funzioni algebriche e logaritmiche, quando sia possibile, trattata la prima volta da Abel nella Memoria: *Ueber die Integration der Differential-Formel* $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, *weun* R *und* ρ *ganze, Functioneu sind* (*), considerata dal Sig. Liouville nel suo lavoro: *Sur les Transcendantes Elliptiques de première et de deuxième espèce, considérées comme fonctions de leur amplitude* (**), progredì assaissimo per le due recenti Memorie del Sig. Tchebichef; la prima: *Sur l'integration des differentielles irrationnelles* (***), la seconda: *Sur l'integration des differentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du troisième ou de quatrième degré* (****).

(*) Crelle, Journal für die Mathematik, Band 1.

(**) Journal de l'Ecole polytéchnique, Cahier 27.

(***) Journal dr Liouville, T. XVIII.

(****) Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences de St—Pétersbourg. Sixième Série. Sciences Math. et phys. T. VI.

In questa l'Autore dopo aver determinato colle regole date nella prima Memoria la parte algebrica, ed il numero dei termini logaritmici, e d'aver scritte le equazioni che servono a determinare le funzioni affette dai segni logaritmici, osserva come queste equazioni sieno spesso assai complicate; poi mostra, con analisi ingegnosa, il modo di ridurle ad altre simili più semplici. Tuttavia tale riduzione, eseguita in generale come venne da lui indicato, non torna veramente utile se non nel caso in cui il grado del polinomio posto sotto il segno radicale non sia superiore a 4; permettendo in tal caso, pel verificarsi di circostanze speciali, di ridurre la questione a quella già risoluta da Abel nella Memoria citata. In questa Nota accennerò brevemente come l'analisi del Sig. Tchebichef, in un solo punto generalizzata, conduca a trovare equazioni ridotte, per le quali si verifichino sempre, qualunque sia il grado del polinomio sotto il segno radicale purchè pari, quelle circostanze a cui era dovuta pel polinomio del terzo e quarto grado la completa risoluzione della questione.

Così pei lavori del Sig. Tchebichef e per l'accennata Memoria di Abel la questione dell'integrazione dei radicali quadrati in termini algebrici e logaritmici, quando sia possibile, potrà risguardarsi come risoluta; dipendendo, come è noto, la integrazione dei radicali quadrati nel caso che il polinomio affetto dal segno radicale sia di grado dispari, dal caso in cui il polinomio sia di grado pari.

Richiamo le equazioni, sulle quali venne dal Sig. Tchebichef eseguita la riduzione; esse hanno la forma:

$$\frac{X + Y\sqrt{\theta(x)}}{X - Y\sqrt{\theta(x)}} = R\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}, \quad \delta\,\frac{X + Y\sqrt{\theta(x)}}{X - Y\sqrt{\theta(x)}} = \pi\rho$$

dove X, Y, u, v indicano funzioni razionali intere della variabile x, le prime due a trovarsi, le altre note; R una funzione che non si annulla ne diviene infinita per nessun

valore finito della variabile; ρ e π due numeri interi, il primo incognito, il secondo noto; e

$$\delta \frac{X + Y\sqrt{\theta(x)}}{X - Y\sqrt{\theta(x)}}$$

indica il grado della funzione

$$\frac{X + Y\sqrt{\theta(x)}}{X - Y\sqrt{\theta(x)}}$$

che, affetta dal segno logaritmico, entra a comporre il valore dell'integrale.

Queste equazioni, sovente complicate pei gradi elevati delle u e v, e pel valore grande di π, si ponno semplificare, riducendole ad altre simili in cui sia:

$$\delta(uv) + \pi < \frac{1}{2(n-1)} \delta\theta(x)$$

essendo $2n$ il grado di $\theta(x)$.

Si ponga:

$$\frac{X + Y\sqrt{\theta(x)}}{X - Y\sqrt{\theta(x)}} = \left|\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\right|^{\rho} \frac{P + Q\sqrt{\theta(x)}}{P - Q\sqrt{\theta(x)}}$$

dove s'intendano con:

$$p\,,\; q\,,\; \theta_1\,,\; \theta_2\,,\; P,\; Q$$

funzioni razionali intere di x, delle quali: le P e Q sono le nuove incognite, le θ_1 e θ_2 tali che il loro prodotto eguagli $\theta(x)$, e le p e q da determinarsi nel modo seguente:

Trovata una funzione S per cui le frazioni:

$$\frac{S\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2}}{u}, \quad \frac{S\sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_2}}{v}$$

non diventino infinite per nessun valore finito di x, si sviluppi la:

$$\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$$

in frazione continua e fra le ridotte si cerchi quella il cui denominatore sia di grado inferiore al grado della funzione :

$$\sqrt{\left\{\frac{uv\theta_1 . x^n}{\theta(x)^{\frac{1}{2(n-1)}}}\right\}}$$

e che preceda una ridotta, il cui denominatore sia di grado superiore a quello della stessa funzione. Indicata tale ridotta con

$$\frac{M}{N}$$

si ponga :

$$q = N\,, \quad p = SN - Muv.$$

Allora, le funzioni :

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u}, \quad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v}$$

rimanendo finite per qualsivoglia valore finito di x, si potrà porre :

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = R_1 v'\sqrt{w}$$

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = R_2 u'\sqrt{w'}$$

R_1 , R_2 indicando funzioni, come la R, che non diventano infinite per ciascun valore finito di x, e

$$u'\,,\; v'\,,\; w\,,\; w'\,.$$

funzioni razionali intere di x.

Da queste equazioni si ottiene la seguente :

$$(a) \qquad \frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uvu'v'\sqrt{(ww')}} = R_1R_2$$

la quale mostra che R_1R_2 deve essere quantità costante e

che :

$$w = w'.$$

Dalle stesse equazioni divisa l'una per l'altra, si ha :

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}} = \mathrm{R}\,\frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{u'}$$

quindi posto :

$$\pi_1 = \delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}$$

si avranno per determinare le P e Q le equazioni :

$$\frac{\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{\theta(x)}}{\mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{\theta(x)}} = \mathrm{R}\left(\frac{u'}{v'}\right)^{\rho}\quad,\quad \delta\,\frac{\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{\theta(x)}}{\mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{\theta(x)}} = (\pi - \pi_1)\rho$$

nelle quali sarà :

$$\delta(u'v') + \pi - \pi_1 < \frac{1}{2(n-1)}\,\delta\theta(x)$$

$$\delta(u'a') + \pi_1 - \pi < \frac{1}{2(n-1)}\,\delta\theta(x)\,.$$

Infatti le quantità

$$\delta(u'v') + \pi - \pi_1\,,\quad \delta(u'v') + \pi_1 - \pi$$

sono, per la (a), eguali od inferiori rispettivamente alle :

$$\delta\,\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} + \delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}\,x^{\pi}$$

$$= 2\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{(uv)}}\,x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\delta\,\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} + \delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\,x^{-\pi}$$

$$= 2\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{(uv)}}\,x^{-\frac{\pi}{2}}\,.$$

Ora, la prima di queste quantità, colla sostituzione dei valori di p e q diviene;

$$\frac{1}{2(n-1)}\delta\theta(x)+2\delta\left\{\frac{S-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}-\frac{M}{N}\right\}N\sqrt{\left\{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\theta(x)^{\frac{1}{2(n-1)}}}\right\}}$$

che è manifestamente inferiore a

$$\frac{1}{2(n-1)}\delta\theta(x)$$

pel modo con cui fu determinata la ridotta $\frac{M}{N}$.

Quanto alla seconda, essa non supererà almeno una delle due quantità:

$$2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{(uv)}}x^{-\frac{\pi}{2}}=2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{(uv)}}x^{\frac{\pi}{2}}-2\pi$$

$$2\delta\frac{q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{(uv)}}x^{-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2(n-1)}\delta\theta(x)-2\delta\frac{1}{N}\sqrt{\left\{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\theta(x)^{\frac{1}{2(n-1)}}}\right\}}$$

la prima delle quali è minore di

$$\frac{1}{2(n-1)}\delta\theta(x)$$

per esserlo già la

$$2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{(uv)}}x^{\frac{\pi}{2}}$$

e la seconda lo è pure, riflettendo al valore attribuito ad N.

Dalle disuguaglianze poi:

$$\delta\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}+\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}x^\pi<\frac{1}{2(n-1)}\delta\theta(x)$$

$$\delta\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}+\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi}<\frac{1}{2(n-1)}\delta\theta(x)$$

Avendosi :

$$\delta\, \frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} < \frac{1}{2(n-1)}\ \delta\theta(x)$$

e per la (a) essendo :

$$\delta\, \frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} = \delta(u'v'w)$$

sarà :

$$\delta(u'v'w) < \frac{1}{2(n-1)}\ \delta\theta(x)$$

e siccome

$$\frac{1}{2(n-1)}\ \delta\theta(x) < 2$$

risulta che il prodotto $u'v'$ sarà o una funzione lineare, $ax + b$, o una costante.

E per a diverso da zero le differenze

$$\pi - \pi_0\,, \qquad \pi_1 - \pi$$

ossia le quantità :

$$\delta\, \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}\, x^{\pi} = 2\delta\, \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{(uv)}}\, x^{\frac{\pi}{2}} - \delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv}$$

$$\delta\, \frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\, x^{-\pi} = 2\delta\, \frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{(\sqrt{uv})}\, x^{-\frac{\pi}{2}} - \delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv}$$

sono rispettivamente eguali a :

$$2\delta\, \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{(uv)}}\, x^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

$$2\delta\, \frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{(uv)}}\, x^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

quindi rispettivamente minori di :

$$\frac{1}{2(n-1)}\,\delta\theta(x)-1\,,\quad \frac{1}{2(n-1)}\,\delta\theta(x)-1$$

la qual cosa esige che sia:

$$\pi-\pi_1=0.$$

Così si verificano sempre le circostanze sufficienti per la completa risoluzione della questione.

É poi facile a vedersi che, quì pure, la riduzione esposta è sempre possibile, quando le equazioni primitive non soddisfino già alla condizione:

$$\delta(uv)+\pi<\frac{1}{2(n-1)}\,\delta\theta(x)$$

e che la condizione

$$\delta\theta(x)=2n$$

è voluta da ciò che dovendo essere le p e q funzioni razionali, anche i termini della ridotta, coi quali esse sono formate, dovranno essere razionali; e siccome tale ridotta rappresenta il vero valore della frazione continua esattamente fino a quantità di ordine inferiore a quello della $\frac{1}{uv}\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}$, se il grado di $\theta(x)$ non fosse pari si avrebbero, in generale, per M ed N funzioni nelle quali la variabile avrebbe esponenti frazionari.

Pavia 5 Luglio 1856.



RICERCHE ALGEBRICHE SULLE FORME BINARIE.

MEMORIA

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

§. 1.° Sieno $\varphi(x, y)$; $\psi(x, y)$ due covarianti, rispettivamente dei gradi i, s della forma binaria dell' ennesimo grado :

$$u = (a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n.$$

I coefficienti delle potenze delle indeterminate X, Y nello sviluppo della funzione :

$$(1) \qquad \varphi\left(x\mathrm{X} - \frac{1}{s}\psi'(y)\mathrm{Y}, \quad y\mathrm{X} + \frac{1}{s}\psi'(x)\mathrm{Y}\right)$$

Sono tutti covarianti di u. Questa proposizione enunciata dapprima dal Sig. Hermite nel giornale di Cambridge, venne recentemente dimostrata da questo distinto Geometra nella sua seconda Memoria : *Sur le théorie des fonctions homogènes* ec. pubblicata nel Tomo 52 del giornale del Sig. Crelle. In una nota inserita nel fascicolo di febbraio 1856 di questi *Annali*, abbiamo trovato esistere una relazione fra i covarianti ottenuti dallo sviluppo della funzione superiore; la quale relazione indicando lo sviluppo suddetto con :

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i)(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^i$$

riducesi alla seguente :

$$(2) \quad \alpha_{r+1} = \frac{1}{s(i-r)}\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\alpha_r}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\alpha_r}{dx}\right) + \frac{r(s-1)}{i-r} k\,\alpha_{r-1}$$

essendo :

$$k = \frac{1}{s^2(s-1)^2} \begin{vmatrix} \dfrac{d^2\psi}{dx^2} & \dfrac{d^2\psi}{dx\,dy} \\ \dfrac{d^2\psi}{dx\,dy} & \dfrac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix}.$$

Se nella espressione (1) poniamo $\varphi = u$, e supponiamo:

$$(3) \qquad u\left(x\mathrm{X} - \frac{1}{s}\frac{d\psi}{dy}\mathrm{Y}\,,\; y\mathrm{X} + \frac{1}{s}\frac{d\psi}{dx}\mathrm{Y}\right)$$
$$= (\psi_0\,, \psi_1\,, \ldots, \psi_n)(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^n$$

i covarianti ψ_1, ψ_2 . . . vennero dal Sig. Hermite, nella Memoria citata, denominati *covarianti associati* al covariante ψ: ed intorno ad essi ha dimostrato la seguente fondamentale proposizione:

Qualunque covariante di u, od almeno il prodotto di esso per una potenza di u è una funzione razionale intiera, dei covarianti associati.

§. 2.° Riflettendo a questa proposizione, e precisamente alla dimostrazione di essa data dall' Hermite; presentasi una osservazione intorno la forma di quelle funzioni razionali, intiere dei covarianti associati, dalla quale si deducono moltissime conseguenze, come vedremo nel seguito di questa memoria.

Sia:

$$\pi(x, y) = (c_0\,, c_1 \ldots c_p)(x, y)^p$$

un covariante di u; e supponendo:

$$u(x\mathrm{X} + x_1\mathrm{Y}\,,\; y\mathrm{X} + y_1\mathrm{Y}) = (\mathrm{A}_0\,, \mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_n)(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^n$$

Si avrà per la definizione di covariante:

$$(xy_1 - x_1y)^\mu.\ \pi(x\mathrm{X} + x_1\mathrm{Y}\,,\; y\mathrm{X} + y_1\mathrm{Y})$$
$$= (\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1\,, \ldots \mathrm{C}_p)(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^p$$

essendo μ un numero intiero, e le C_0, C_1 . . . . . essendo formate colle A_0, A_1, . . . come le c_0, c_1 . . . lo sono colle a_0, a_1 . . . .

Ora supponendo:

$$x_1 = -\frac{1}{s}\frac{d\psi}{dy}\,, \qquad y_1 = \frac{1}{s}\frac{d\psi}{dx}\,.$$

Le A_1, A_2 . . . diventano ordinatamente i covarianti as-

sociati ψ_1, ψ_2 . . . del covariante ψ; per cui avremo:

$$(4) \qquad \psi^{\mu}.\,\pi\left(xX - \frac{1}{s}\frac{d\psi}{dy}Y\,,\; yX + \frac{1}{s}\frac{d\psi}{dx}Y\right)$$
$$=(C_0\,,\; C_1 \dots C_p)(X, Y)^p$$

essendo i coefficienti C_0, C_1 . . . formati coi covarianti associati ψ_0, ψ_1 . . . come c_0, c_1 . . . lo sono con a_0, a_1 ...
Notisi che ponendo:

$$D_r = \frac{1}{p(p-1)\dots(p-r+1)}\cdot\frac{1}{s^r}\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\pi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\pi}{dx}\right)^{(r)}$$

si avrà:

$$(5) \qquad \psi^{\mu}.D_r = C_r\,;$$

e che indicando con m il grado di $\pi(x, y)$ rispetto ai coefficienti a_0, a_1 . . . della forma u si ha: $\mu = \frac{1}{2}(mn - p)$.

§. 3°. Dedurremo, come il primo corollario della osservazione su esposta, una proprietà dei covarianti associati alla forma proposta, i quali indicheremo con u_1, u_2 . . . ponendo:

$$(6) \qquad u\left(xX - \frac{1}{n}\frac{du}{dy}Y\,,\; yX + \frac{1}{n}\frac{du}{dx}Y\right)$$
$$= (u_0\,,\; u_1 \dots u_n)(X, Y)^n.$$

Sia θ_r l'invariante quadratico della forma del grado $2r$:

$$\frac{1}{n(n-1)\dots(n-2r+1)}\left(\frac{d^{2r}u}{dx^{2r}}\,,\;\frac{d^{2r}u}{dx^{2r-1}\,dy}\,,\;\dots\;\frac{d^{2r}u}{dy^{2r}}\right)(X, Y)^{2r};$$

esso sarà un covariante di u del grado $2(n-2r)$ rispetto alle variabili x, y e del secondo grado rispetto ai coefficienti a_0, a_1 . . . Quindi supponendo $\pi = \theta_r$ sarà $\mu = 2r$, e la formola (5) nella quale facciasi $r = 0$ darà:

$$u^{2r}\theta_r = u_0 u_{2r} - 2r u_1 u_{2r-1} + \frac{2r(2r-1)}{2} u_2\, u_{2r-2} - \dots$$
$$\dots + (-1)^r\,\frac{1}{2}\,\frac{2r(2r-1)\dots(r+1)}{1.\,2\dots r}\,u_r^2.$$

Pongasi ora :

$$h_r = \frac{1}{n(n-2r)}\left(\frac{du}{dx}\frac{d\theta_r}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{d\theta_r}{dx}\right)$$

sarà h_r un covariante di u del grado $3n - 4r - 2$ rispetto alle variabili, e di terzo grado rispetto ai coefficienti a_0, $a_1 \ldots$, e ponendo $r = 1$ nella formola (5) si avrà :

$$u^{2r} h_r = u_0 u_{2r+1} - (2r-1) u_1 u_{2r} + \frac{2r(2r-3)}{2} u_2 u_{2r-1}$$

$$- \frac{2r(2r-1)(2r-5)}{2.\,3} u_3 u_{2r-2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^r \frac{2r(2r-1)\ldots(r+2)}{1.\,2\ldots r} u_r u_{r+1}\,.$$

Ora dalle due serie di equazioni, le quali deduconsi dalle superiori, e che danno i valori di θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_{\frac{n}{2}}$ o $\theta_{\frac{n-1}{2}}$ secondo che n è pari o dispari; e di h_1, $h_2 \ldots h_{\frac{n}{2}-1}$ o $h_{\frac{n-1}{2}}$ per n pari o dispari, in funzione dei covarianti associati alla forma data; si potranno dedurre i valori dei covarianti associati u_2, $u_3 \ldots u_n$ in funzione dei covarianti θ, h, $u_0 = u$, $u_1 = 0$, e quindi per la proposizione dell' Hermite si avrà il seguente teorema :

Un covariante qualsivoglia di u, od almeno il prodotto di esso per una potenza di u è una funzione intiera e razionale dei covarianti u, θ_1, $\theta_2 \ldots h_1$, h_2, ...

Ponendo nelle due formole superiori $r = 1, 2, 3 \ldots$ si hanno le :

$$u^2\theta_1 = u_0 u_2 - u_1^2\,, \quad u^2 h_1 = u_0 u_3 - u_1 u_2\,,$$

$$u^4\theta_2 = u_0 u_4 - 4u_1 u_3 + 3u_2^2\,, \text{ ec.}$$

dalle quali osservando essere $u_0 = u$, $u_1 = 0$ si dedu-

cono le :

$$u_2 = u\theta_1\,,\quad u_3 = uh_1\,,\quad u_4 = u(u^2\theta_2 - 3\theta^2_1),$$
$$u_5 = u(u^2h_2 - 2h_1\theta_1)\,,$$
$$u_6 = u(u^4\theta_3 - 15u^2\theta_1\theta_2 + 45\theta^3_1 + 10h^2_1)\,,$$
$$u_7 = u(u^4h_3 - 9u^2\theta_1h_2 + 3\theta^2_1h_1 + 5u^2\theta_2h_1)\,,\ \text{ec.}$$

Le prime quattro fra queste formole vennero trovate in altro modo dal Sig. Hermite nella memoria citata.

§. 4.° È evidente che il metodo indicato nel § precedente per determinare i valori dei covarianti associati alla forma u in funzione dei covarianti θ , h ; può estendersi alla ricerca dei valori dei covarianti associati al covariante $\psi(x, y)$, in funzione dei covarianti θ, e di covarianti analoghi ad h. Ma i covarianti associati ψ_2 , ψ_3 . . . ponno esprimersi, mediante una formula generale, in funzione dei covarianti u_1 , u_2 , u_3 . . . . ψ_1 , ψ ; come ora veniamo a stabilire.

Pongasi nel primo membro della (3) :

$$-\frac{1}{s}\frac{d\psi}{dy} = x_1\,,\quad \frac{1}{s}\frac{d\psi}{dx} = y_1$$

e sviluppisi quella espressione scrivendo :

$$u(x_1Y + xX\,,\ y_1Y + yX) = u(x_1\,,\ y_1)Y^n$$
$$+\left(x\frac{du}{dx_1} + y\frac{du}{dy_1}\right)Y^{n-1}X + \ldots\ldots$$

per cui risulta :

$$(7)\qquad \psi_r = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}\left(x\frac{du}{dx_1} + y\frac{du}{dy_1}\right)^{(n-r)}\,.$$

Ciò posto pongasi nella (6) ψ_1 e ψ in luogo di X e di Y; ed esservando essere :

$$\psi_1 = \frac{1}{n^s}\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{du}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{du}{dx}\right)\,,\quad \psi = \frac{1}{s}\left(x\frac{d\psi}{dx} + y\frac{d\psi}{dy}\right)$$

si otterranno le :

$$x\psi_1 - \frac{1}{n}\frac{du}{dy}\psi = ux_1\ , \qquad y\psi_1 + \frac{1}{n}\frac{du}{dx}\psi = uy_1$$

per cui sostituendo si avrà :

$$u^n . u(x_1\ , \ y_1) = (u_0\ , \ u_1 \ldots u_n)(\psi_1\ , \ \psi)^n = \mathrm{F}(\psi_1\ , \ \psi).$$

Da questa osservando alle superiori, si deducono le :

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\psi_1} = u^{n-1}\left(x\frac{du}{dx_1} + y\frac{du}{dy_1}\right),\ \frac{d^2\mathrm{F}}{d\psi^2_1} = u^{n-2}\left(x\frac{du}{dx_1} + y\frac{du}{dy_1}\right)^{(2)} \text{ ec.}$$

Dunque in causa della (7) si avrà la rimarchevole formola:

$$(8) \qquad u^r\psi_r = (u_0\ , \ u_1\ , \ \ldots \ u_r)(\psi_1\ , \ \psi)^r.$$

Questo risultato si può anche generalizzare considerando la equazione (4) e la :

$$(9) \qquad u^\mu . \pi\left(x\mathrm{X} - \frac{1}{n}\frac{du}{dy}\mathrm{Y}\ , \ y\mathrm{X} + \frac{1}{n}\frac{du}{dx}\mathrm{Y}\right)$$

$$= (\gamma_0\ , \ \gamma_1 \ldots \gamma_p)(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^p$$

nella quale le γ_0, γ_1 . . . sono formate colle u_0, u_1 .... come le c_0, c_1 . . . lo sono colle a_0, a_1 . . . . Infatti ponendo in quest'ultima ψ_1, ψ in luogo di X, Y si ottiene :

$$u^{\mu+p} . \pi(x_1\ , \ y_1) = (\gamma_0\ , \ \gamma_1 \ldots \gamma_p)(\psi_1\ , \ \psi)^p = \mathrm{F}(\psi_1\ , \ \psi)$$

e quindi :

$$u^{\mu+r}\left(x\frac{d\pi}{dx_1} + y\frac{d\pi}{dy_1}\right)^{(p-r)} = \frac{d^{p-r}\mathrm{F}}{d\psi_1^{\,p-r}}$$

per cui dallo sviluppo della (4) si ha :

$$(10) \qquad u^{\mu+r}\,\mathrm{C}_r = \psi^\mu(\gamma_0\ , \ \gamma_1\ , \ \ldots \ \gamma_r)(\psi_1\ , \ \psi)^r.$$

Se $\pi = u$ si ha $\mu = 0$, e da questa deducesi la (8).

§. 5.° Per quanto si è osservato al §. 2.° i covarianti γ_0, γ_1 . . . dati dallo sviluppo della (9) saranno formati coi covarianti u_0, u_1 . . . come i coefficienti c_0, c_1 . . . . .

del covariante $\pi(x, y)$ lo sono coi coefficienti a_0, a_1 ..... della forma data. Ora considerando γ_r come funzione di u_0, u_1 . . . si avrà :

$$\frac{d\gamma_r}{dx}=\sum_0^n{}_m \frac{d\gamma_r}{du_m}\frac{du_m}{dx}, \qquad \frac{d\gamma_r}{dy}=\sum_0^n{}_m \frac{d\gamma_r}{du_m}\frac{du_m}{dy}$$

dalle quali :

$$\frac{du}{dx}\frac{d\gamma_r}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{d\gamma_r}{dx}=\sum_0^n{}_m \frac{d\gamma_r}{du_m}\left(\frac{du}{dx}\frac{du_m}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{du_m}{dx}\right);$$

ma se nella formola (2) supponiamo dapprima $\varphi=\psi=u$ per cui $i=s=n$, $k=\theta_1$; quindi $\varphi=\pi$, $\psi=u$ ed in conseguenza $i=p$, $s=n$, $k=\theta_1$ si ottengono le due seguenti :

$$u_{m+1}=\frac{1}{n(n-m)}\left(\frac{du}{dx}\frac{du_m}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{du_m}{dx}\right)+\frac{m(n-1)}{n-m}\theta_1 u_{m-1}$$

$$\gamma_{r+1}=\frac{1}{n(p-r)}\left(\frac{du}{dx}\frac{d\gamma_r}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{d\gamma_r}{dx}\right)+\frac{r(n-1)}{p-r}\theta_1\gamma_{r-1}$$

per le quali ponendo :

$$P(\gamma_r)=\sum_0^n{}_m m u_{m-1}\frac{d\gamma_r}{du_m}, \quad Q(\gamma_r)=\sum_0^n{}_m (n-m)u_{m+1}\frac{d\gamma_r}{du_m}$$

si giunge alla equazione :

$$Q(\gamma_r)-(p-r)\gamma_{r+1}=(n-1)\theta_1[P(\gamma_r)-r\gamma_{r-1}]$$

per la sussistenza della quale dovranno essere :

$$Q(\gamma_r)=(p-r)\gamma_{r+1}, \qquad P(\gamma_r)=r\gamma_{r-1}.$$

La prima di queste darà i valori di γ_1, γ_2 . . . allorquando sia conosciuto γ_0; e dalle medesime si ponno dedurre le equazioni caratteristiche per un covariante dovute al Sig. Cayley; le quali vengono qui ritrovate in un modo affatto differente.

§. 6.° Determinati i valori dei covarianti associati alla forma data in funzione dei covarianti θ, h; l'applicazione del principio esposto al §. 2.° dà origine ad alcune relazioni fra i covarianti di una stessa forma, le quali sono di molto utile nella ricerca dei covarianti fondamentali od irreducibili. Eccone alcuni esempi.

1.° Sia δ il discriminante della forma di terzo grado:

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\left(\frac{d^3u}{dx^3}, \frac{d^3u}{dx^2dy}, \frac{d^3u}{dy^3}\right)(X, Y)^3;$$

esso sarà un covariante di u di quarto grado rispetto ai coefficienti, e del grado $4(n-3)$ rispetto alle variabili, quindi fatto $\pi = \delta$ sarà $\mu = 6$ ed:

$$u^6\delta = -(u^2_0\, u^2_3 + 4u_0\, u^3_2) - -(u^4 h^2_1 + 4u^4 \theta^3_1)$$

e quindi

$$(11) \qquad u^2\delta + h^2_1 + 4\theta^3_1 = 0.$$

Se la forma u fosse di terzo grado θ_1, h_1 sono i soli due covarianti irreducibili della medesima, e δ l' unico invariante. In questo caso la formola superiore venne già trovata dal Sig. Cayley.

2.° Sia ζ l'invariante cubico della forma di quarto grado:

$$\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-2)}\left(\frac{d^4u}{dx^4}, \frac{d^4u}{dx^3dy} \ldots \frac{d^4u}{dy^4}\right)(X, Y)^4;$$

ζ sarà un covariante di u del terzo grado rispetto ai coefficienti, e del grado $3(n-4)$ rispetto alle variabili; quindi supposto $\pi = \zeta$ si ha $\mu = 6$ ed:

$$u^6\zeta = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix}$$

ossia sostituendo e riducendo:

(12) $$u^3\zeta = u^2\theta_1\theta_2 - 4\theta^3_1 - h^2_1.$$

Per $n=4$ si ha la relazione trovata dal Cayley fra i covarianti θ_1, h_1 e gli invarianti quadratico e cubico θ_2, ζ della forma di quarto grado (Vedi anche la prima delle Memorie dell'Hermite nel Tomo 52 del giornale di Crelle). Dalle equazioni (11) (12) si ottiene anche la:

$$u\zeta = \theta_1\theta_2 + \delta.$$

3.° Sia:

$$\rho = \frac{1}{n(n-4)}\left(\frac{du}{dx}\frac{d\zeta}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{d\zeta}{dx}\right)$$

ponendo $r=1$ nella (5) si ha:

$$u^6\rho = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_5 \end{vmatrix}$$

o sostituendo e riducendo:

(13) $$u\rho = \theta_1 h_2 - \theta_2 h_1$$

4.° Sia:

$$\sigma = \frac{1}{n^2(n-2)(3n-13)}\left(\frac{du}{dx}\frac{d\zeta}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{d\zeta}{dx}\right)^{(2)}$$

ponendo $r=2$ nella (5) si ha:

$$u^6\sigma = \begin{vmatrix} u_0 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_4 & u_5 \end{vmatrix}$$

per cui:

$$u^3\sigma = u^2h_1h_2 + 3\theta_1h^2_1 + 7u^2\theta^2_1\theta_2 - 12\theta^4_1 - u^4\theta^2_2,$$

la quale in causa della (12) può ridursi alla:

(14) $$u\sigma = h_1h_2 - u^2\theta^2_2 + 4\theta^2_1\theta_2 + 3u\theta_1\zeta.$$

5.° Sia γ l'invariante di quarto grado della forma di quinto grado :

$$\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-4)}\left(\frac{d^5u}{dx^5}, \frac{d^5u}{dx^4\,dy} \ldots \frac{d^5u}{dy^5}\right)(X, Y)^5$$

sarà γ un covariante di u di quarto grado rispetto ai coefficienti, e di grado $4(n-5)$ rispetto alle variabili, quindi fatto $\pi=\gamma$ sarà $\mu=10$ ed :

$$u^4\gamma = 12h^2{}_1\,\theta_2 - 16u^2\,\theta_1\,\theta^2{}_2 + 48\theta^3{}_1\theta_2 - u^2h^2{}_2$$

ed anche per la (12) :

$$(15) \qquad u^2\gamma + h^2{}_2 + 4\theta_1\theta^2{}_2 + 12u\zeta\theta_2 = 0$$

Analogamente indicando con β l'invariante di ottavo grado della medesima forma di quinto grado; si ottiene la :

$$(16) \qquad 9u^4\beta = (3\theta_1\zeta + \sigma)(h_2\rho - 2\theta_2\sigma)$$
$$- (2\theta_1\rho - 3h_1\zeta)(2\theta_2\rho - 3h_2\zeta) + 6u\zeta(\rho^2 - 3\zeta\sigma).$$

Per $n=5$ le (15), (16) sono relazioni fra i covarianti θ_1, θ_2, h_1, h_2, ζ, ρ, σ rispettivamente dei gradi 6, 2, 9, 5, 3, 6, 9, e gli invarianti γ, β del quarto e dell'ottavo grado.

Le conseguenze dedotte dai Sig. Cayley ed Hermite dalle relazioni (11) (12) per la teoria algebrica ed aritmetica delle forme cubiche e biquadratiche dinotano l'importanza delle relazioni di questa specie. Vediamo anche come esse tornino utili nella ricerca dei covarianti associati ad un covariante dato.

§. 7.° Se nella formola (8) supponiamo $\psi=\theta_1$ si ha evidentemente $\psi_1 = -\frac{1}{2}h_1$, quindi fatto $r{=}2$ si ottiene :

$$u^2\psi_2 = \frac{1}{4}uh^2{}_1 + u_2\theta^2{}_1$$

e per le (11), (12) :

$$\psi_2 = -\frac{1}{4}u\delta = \frac{1}{4}u(\theta_1\,\theta_2 - u\zeta)\ .$$

Così :

$$u^3\psi_3 = (u_0\,,\; u_1\,,\; u_2\,,\; u_3)\left(-\frac{1}{2}h_1\,,\;\theta_1\right)$$

ossia :

$$\psi_3 = \frac{1}{8}h_1\delta = -\frac{1}{8}h_1(\theta_1\,\theta_2 - u\zeta).$$

Analogamente si ha :

$$\psi_4 = \theta^3{}_1\,\zeta + \frac{1}{16}u(u\zeta - \theta_1\,\theta_2)^2.$$

Quindi per le forme di terzo e quarto grado i covarianti associati al covariante θ_1 sono funzioni intiere e razionali dei covarianti irreducibili u, θ_1, h_1; risultato già ottenuto dal Sig. Hermite.

Continuando abbiamo :

$$u^5\psi_5 = (u_0\,,\; u_1\ldots u_5)\left(-\frac{1}{2}h_1\,,\;\theta_1\right)$$

ossia sviluppando od osservando alle (11), (12), (13) si ha :

$$u\psi_5 = \frac{1}{2}\theta^2{}_1(2\theta_1\rho - 3h_1\zeta) - \frac{1}{32}uh_1\delta^2.$$

Ora se nella formola (10) poniamo $\pi = \zeta$, $\psi = \theta_1$ si ha $\psi_1 = -\frac{1}{2}h_1$, $\mu = 6$, e per $r = 1$ si ottiene :

$$u^7C_1 = \theta^6{}_1\left(-\frac{1}{2}h_1\,\gamma_0 + \theta_1\,\gamma_1\right)$$

e per le (11), (12) essendo :

$$\gamma_0 = u^6\zeta\,,\quad \gamma_1 = \frac{1}{3}u^6\rho$$

si ha :

$$6uC_1 = \theta^6{}_1\,(2\rho\theta_1 - 3\zeta h_1)$$

per cui indicando con λ_1 il covariante della forma u :

$$\frac{1}{(n-2)(n-4)}\left(\frac{d\theta_1}{dx}\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\theta_1}{dy}\frac{d\zeta}{dx}\right)$$

di quinto grado rispetto ai coefficienti, e di grado $5n-18$ rispetto alle variabili; si ha per la (5):

$$u\lambda_1 = 2\rho\theta_1 - 3\zeta h_1 ,$$

per la quale:

$$\psi_5 = \frac{1}{2}\theta^3{}_1\,\lambda_1 - \frac{1}{32}h_1\,\delta^2.$$

Quindi per la forma di quinto grado i covarianti associati al covariante θ_1 sono funzioni intiere e razionali dei covarianti irreducibili u, θ_1, h_0, θ_2, ζ, λ_1 rispettivamente dei gradi 5, 6, 9, 2, 3, 7 rispetto alle variabili, e dei gradi 1, 2, 3, 2, 3, 5 rispetto ai coefficienti.

Pavia 10 Agosto 1856.

CALCUL DES EXPRESSIONS GÉNÉRALES, QUI DONNENT LA VALEUR DES DIVERS ÉLÉMENTS DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE

PAR GEORGES DOSTOR

Docteur ès sciences mathématiques,
Professeur de mathématiques à Paris.

---

1. Nous divisons ce mémoire en deux parties. Dans la première nous exprimerons la conique à centre par les coordonnées des extrémités de deux diamètres conjugués. Nous établissons ainsi une *nouvelle* équation par laquelle on peut representer toute conique à centre, et qui nous servira à demontrer la plupart des propriétés des diamètres conjugués.

Dans la deuxième partie nous présentons l'équation de la conique en valeur des coordonnées des sommets, et nous l'appliquons immédiatement au calcul de tous les éléments de la courbe.

PREMIÈRE PARTIE.

Nouvelle forme de l'équation des coniques à centre, et application à le demonstration des principales propriétés métriques des diamétres conjugués.

2. *Coordonnées du centre.* Supposons que l'équation

(1) $f(x, y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$

représente une ellipse ou une hyperbole. On sait que les coordonnées, p, q du centre s'obtiennent en résolvant le système des deux équations

(2) $f'_y = 2Ay + Bx + D = 0$, $f'_x = By + 2Cx + E = 0$

qui donnent

$$\text{(I)} \qquad p = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad q = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$$

Si l'on rapporte la conique (1) à ce centre comme origine des coordonnées, son equation se simplifie et devient

$$(3)\qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + H = 0\,,$$

où l'on a

$$(II)\qquad H = F + \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC}\,,$$

ou bien

$$(III)\quad (B^2 - 4AC)H = AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF.$$

C'est sous la forme (3) que nous emploierons dans la suite, sauf avis contraire, l'équation des courbes du second degrés à centre unique.

3. *Interprétation géométrique de l'équation.*

$$(4)\qquad a'^2y^2 \pm b'^2x^2 = \pm a'^2b'^2.$$

Lorsque l'ellipse et l'hyperbole sont rapportées à une système de deux diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, l'équation (4) de ces courbes est l'expression analytique de la propriété géométrique suivante : *Si l' on mène un rayon* OM *à un point quelconque* x, y *d'une conique a centre, et que l'on joigne l'extrémité* M *aux extrémités* A *et* B *des deux demi-diamètres conjugués* $OA = a'$, $OB = b'$, *le carré du triangle* ABO *compris entre les deux rayons conjugués* AO, OB *est egual à la somme ou à la difference des carrés des deux triangles* BMO, AMO, *suivant que la conique est une ellipse, ou une hyperbole.*

Car, si φ désigne l'angle d'inclinaison mutuelle des deux diamétres conjugués $2a'$, $2b'$ on oura

$$AMO = \frac{1}{2}\,a'y \sin\varphi\,,\quad BMO = \frac{1}{2}\,b'x \sin\varphi,\ ABO = \frac{1}{2}\,a'b'\sin\varphi\,,$$

ou, en vertu de l'équation (4) des coniques,
pour l'ellipse

$$(5)\qquad \overline{BMO}^2 + \overline{AMO}^2 = \overline{ABO}^2$$

et pour l'hyperbole.

(6) $$\overline{BMO}^2 - \overline{AMO}^2 = \overline{ABO}^2.$$

4. *Equation de l'ellipse et de l' hyperbole en fonction des coordonnées des points extrêmes de deux diamètres conjugués.*

Supposons que la conique soit rapportée à deux axes quelconques menés par le centre O, et inclinés entre eux d'un angle θ. Soient x', y' les coordonnées du point A ; x'', y'' celles du point B; et x, y les coordonnées du point mobile M. Admettons pour l'hyperbole que, des deux rayons conjugués AO, OB, le dernier soit celui qui ne rencontre pas la courbe : $x''\sqrt{-1}$, $y''\sqrt{-1}$ seront les coordonnées reélles du point B. Nous avons

pour l'ellipse

$$AMO = \frac{1}{2}\sin\theta.(x'y - y'x)\ ,\ BMO = \frac{1}{2}\sin\theta.(x''y - y''x),$$

$$ABO = \frac{1}{2}\sin\theta.(x''y' - x''y');$$

et pour l'hyperbole

$$AMO = \frac{1}{2}\sin\theta.(x'y - y'x)\ ,\ BMO = \frac{1}{2}\sin\theta.\sqrt{-1}(x''y - y''x)$$

$$ABO = \frac{1}{2}\sin\theta.\sqrt{-1}(x''y' - x'y'').$$

Substituant ces valeurs respectives dans les équations (5) et (6) nous obtenons

(IV) $$(x'y - y'x)^2 + (x''y - y''x)^2 = (x'y'' - y'x'')^2$$

pour l'équation génèrale des coniques à centre en fonctions des coordonnées réelles et imaginaires de deux diamètres conjuguées quelconques, rapportées à deux axes arbitraires menées par les centre de ces courbes.

5. *Conditions d'identité des deux coniques* (3) *et* (IV).

Développons l'équation (IV) : elle devient

$$(7)\quad (x'^2 + x''^2)y^2 - 2(x'y' + x''y'')xy + (y'^2 + y''^2)x^2 - (x'y'' - y'x'')^2 = 0.$$

Pour que cette dernière représente la même courbe que (3), il faut et il suffit que l'on ait

$$(8)\quad \begin{cases} A\lambda = x'^2 + x''^2, & -B\lambda = 2(x'y' + x''y''), \\ C\lambda = y'^2 + y''^2, & +H\lambda = (x'y'' - y'x'')^2, \end{cases}$$

où nous représentons par λ une certaine constante, que nous allons évaluer en fonction des coëfficients de l'équation (3).

6. *Determination de la constante* λ.

Pour y arriver, il nous suffira de calculer l'expression $B^2 - 4AC$. Or les trois premiers égalités (8) nous donnent immédiatement

$$(B^2 - 4AC)\lambda^2 = 4(x'y' + x''y'')^2 - 4(x'^2 + x''^2)(y'^2 + y''^2) = -4(x'y'' - y'x'')^2;$$

comparant ce résultat avec la dernière des relations (8); il nous vient

$$(V)\qquad \lambda = \frac{4H}{B^2 - 4AC}.$$

7. *Relations fondamentales entre les coefficients de l'équation* (3) *et les coordonnées des extrémités de deux diamètres conjugués.*

Introduisons la valeur (V) de λ dans les égualités (8); nous obtenons les relations

$$(VI)\quad x'^2 + x''^2 = \frac{4AH}{B^2 - 4AC},\quad y'^2 + y''^2 = \frac{4CH}{B^2 - 4AC};$$

$$(VII)\quad 2(x'y' + x''y'') = \frac{-4BH}{B^2 - 4AC};$$

(VIII) $$(x'y'' - y'x'')^2 = \frac{-4H^2}{B^2 - 4AC}.$$

8. *Propriétés metriques des diamètres conjugués.*

Les relations (VI) et (VII) prouvent que

1.° *La somme des carrés des projections de deux diamètres quelconques sur une droite arbitraire est constante.*

2.° *Si l'on projette deux diamètres conjugués quelconques sur deux droites, la somme des produits, que l'on obtient, en multipliant entre elles les projections relatives au même diamétre, est constante.*

L'égualité (VIII) exprime que

3.° *Les triangles compris entre deux demi-diamètres quelconques ont même surface.*

9. *Théoréme d'Appolonius.* Ajoutons les égualités (VI) e (VII), aprés avoir multiplié cette derniére par cos θ, θ étant toujours l'angle des axes de coordonnées; nous trouvons

(IX) $$(x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos\theta) + (x''^2 + y''^2 + 2x''y'' \cos\theta) = \frac{4(A - B\cos\theta + C)}{B^2 - 4AC},$$

pendant que l'égalité (VIII) donne

(X) $$4(x'y'' - y'x'') = \frac{8H}{\sqrt{(4AC - B^2)}}.$$

Ces deux résultats démontrent que

1.° *La somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante.*

3.° *Le parallélogramme construit sur deux diamétres conjugués quelconques a une surface constante.*

10.° *Expressions des dérivées de l'équation de la conique, prises par rapport aux coordonnées des extrémités de deux diamètres conjugués.*

(XI) $$\frac{2Ay' + Bx'}{x''} = -\frac{By' + 2Cx'}{y''} = \pm\frac{\sqrt{(4AC - B^2)}}{H}$$

$$\text{(XII)}\quad \frac{2Ay''+Bx''}{x'}=-\frac{By''+2Cx''}{y'}=\pm\frac{\sqrt{(4AC-B^2)}}{H}.$$

11. *Relation entre les coéfficients angulaires de deux diamètres conjugués.*

L'égualité formée par les deux premièrs rapports (XI) pouvant s'écrire

$$2Ay'y''+B(x'y''+y'x'')+2Cx'x''=0$$

on en déduit immédiatement

$$\text{(XIII)}\qquad 2Am'm''+B(m'+m'')+2C=0,$$

si l'on a soin de poser

$$\text{(9)}\qquad y'=m'x',\quad y''=m''x''.$$

Telle est la relation cherchée.

12. *Angle de deux diamètres conjugués.*

En désignant par ε', ε'' les inclinaisons sur l'axe des deux rayons conjugués OA, OB, par φ l'angle qu' ils comprennent, nous avons

$$\operatorname{tang}\varphi=\operatorname{tang}(\varepsilon''-\varepsilon')=\frac{\operatorname{tang}\varepsilon''-\operatorname{tang}\varepsilon'}{1+\operatorname{tang}\varepsilon''\operatorname{tang}\varepsilon'};$$

et comme

$$\operatorname{tang}\varepsilon''=\frac{m''\sin\theta}{1+m''\cos\theta},\quad \operatorname{tang}\varepsilon'=\frac{m'\sin\theta}{1+m'\cos\theta},$$

il vient

$$\text{(10)}\qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{(m''-m')\sin\theta}{1+m'm''+(m'+m'')\cos\theta}.$$

Afin d'avoir la valeur de $\operatorname{tang}\varphi$ en fonction de m' seul, il nous suffira de remplacer, dans cette dernière expression, le coéfficient m'' par sa valeur

$$\text{(11)}\qquad m''=-\frac{2Am'+B}{Bm'+2C}$$

tirée de (XIII). Nous trouvons ainsi que

$$\text{(XIV)}\quad \tan\varphi = \frac{2(Am'^2 + Bm' + C)}{(B-2A\cos\theta)m'^2 - 2(A-C)m' - (B-2C\cos\theta)}$$

13. *Equation plus générale des coniques à centre.*

Soient p, q le coordonnées du centre de la conique (IV), lorsque ce centre est rapporté à une origine quelconque. Rapportons la courbe a la même origine ; il nous suffira de remplacer dans son équation x, y ; x', y' ; x'', y'' par $x-p$, $y-q$; $x'-p$ etc. L'équation (IV) deviendra

$$\text{(XV)}\quad \frac{\left(\frac{y-q}{x-p} - \frac{y'-q}{x'-p}\right)^2}{(x''-p)^2} + \frac{\left(\frac{y-q}{x-p} - \frac{y''-q}{x''-p}\right)^2}{(x'-p)^2} = \frac{\left(\frac{y'-q}{x'-p} - \frac{y''-q}{x''-p}\right)^2}{(x-p)^2}.$$

Telle est la forme générale que l'on peut donner à l'équation de l'ellipse et de l' hyperbole , dont le centre est au point p, q, et dont deux diamètres conjugués sont terminés aux points x', y' ; x'', y''.

DEUXIÈME PARTIE.

Nouvelle forme de l'équation des coniques à centre en valeur des coordonnées des sommets, et application au calcul des principaux éléments de ces courbes.

14. *Equation de l'ellipse et de l'hyperbole, en fonction des sommets.*

Lorques le deux diamètres conjugués OA, OB sont les axes de la conique, l'équation (IV) peut se mettre sous une autre forme caractéristique, qu'il est important d'établir.

En effet soient

$$y = m'x, \qquad y = m''x$$

les équations des deux axes. Ces deux droites étant perpendiculaires entre elles, nous avons la relation de condition

$$1 + m'm'' + (m' + m'')\cos\theta = 0,$$

ou, puisque

$$y' = m'x', \qquad y'' = m''x'',$$

$$(12) \qquad y'y'' + x'x'' + (x'y'' + y'x'')\cos\theta = 0;$$

d'où nous tirons

$$-y'' = \frac{x' + y'\cos\theta}{y' + x'\cos\theta}x'', \qquad -y' = \frac{x'' + y''\cos\theta}{y'' + x''\cos\theta}x'.$$

Substituons ces valeurs dans les rapports respectifs

$$\frac{x'y - y'x}{x'y'' - x'x''}, \qquad \frac{x''y - y''x}{x''y' - y''x'};$$

nous trouvons qu'ils deviennent

$$\frac{xx' + yy' + (x'y + y'x)\cos\theta}{x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta}, \qquad \frac{xx'' + yy'' + (x''y + y''x)\cos\theta}{x''^2 + y''^2 + 2x''y''\cos\theta}.$$

Comme l'équation (IV) peut s'écrire

$$\left(\frac{x''y - y''x}{x''y' - y''x'}\right)^2 + \left(\frac{x'y - y'x}{x'y'' - y'x''}\right)^2 = 1$$

on voit que les valeurs précédentes la changent en

$$(\text{XVI}) \qquad \frac{(xx' + yx'\cos\theta + yy' + xy'\cos\theta)^2}{(x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta)^2} + \frac{(xx'' + yx''\cos\theta + yy'' + xy''\cos\theta)^2}{(x''^2 + y''^2 + 2x''y''\cos\theta)^2} = 1,$$

avec la condition de

$$x'x'' + y'y'' + (x'y'' + y'x'')\cos\theta = 0.$$

Telle est l'équation des coniques à centre en fonction des coordonnées des sommets de la courbe.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, cette équation se simplifie et se reduit à

$$\text{(XVII)} \qquad \left(\frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(\frac{xx'' + yy''}{x''^2 + y''^2}\right)^2 = 1$$

avec la condition de

$$x'x'' + y'y'' = 0$$

15. *Direction des axes.*

Ces droites étant les diamètres conjugués perpendiculaires entre eux, la tangente de leur angle est égale à l'infini. Introduisons cette hypothése dans l' éxpréssion (XIV) de tang φ au n.° 12. Nous obtenons

$$\text{(XVIII)} \quad (B - 2A\cos\theta)m^2 - 2(A - C)m - (B - 2C\cos\theta) = 0$$

pour l'équation, qui nous donnéra les coefficients angulaires des deux axes de la conique à centre. Nous en tirons

$$\text{(XIX)} \quad m = \frac{A - C \mp \sqrt{[(A-C)^2 + (B - 2A\cos\theta)(B - 2C\cos\theta)]}}{B - 2A\cos\theta}$$

$$= \frac{B - 2C\cos\theta}{C - A \pm \sqrt{[(C-A)^2 + (B - 2C\cos\theta)(B - 2A\cos\theta)]}};$$

$$\text{(XX)} \quad m = \frac{A - C \pm \sqrt{[(A-C)^2\sin^2\theta + (A\cos\theta - B + C\cos\theta)^2]}}{B - 2A\cos\theta}.$$

Soient ω', ω'' les angles d'inclinaison des deux axes de la conique sur l'axe des x. Les deux égualités

$$\text{tang}\,\omega' = \frac{m'\sin\theta}{1 + m'\cos\theta}, \qquad \text{tang}\,\omega'' = \frac{m''\sin\theta}{1 + m''\cos\theta}$$

nous donnent, en ayant égard à l'équation (XVIII),

$$\text{tang}\,\omega' + \text{tang}\,\omega'' = \frac{(m' + m'' + 2m'm''\cos\theta)\sin\theta}{1 + (m' + m'')\cos\theta + m'm''\cos^2\theta},$$

ou

$$\operatorname{tang}\omega' + \operatorname{tang}\omega'' = \frac{2}{\sin\theta}\times\frac{(A+C)\cos^2\theta - B\cos\theta + (A-C)\sin^2\theta}{B - 2C\cos\theta}$$

et

$$\operatorname{tang}\omega' \times \operatorname{tang}\omega'' = -1.$$

On voit donc que

$$\text{(XXII)}\qquad (B - 2C\cos\theta)\sin\theta(\operatorname{tang}^2\omega - 1) - 2[(A+C)\cos^2\theta - B\cos\theta + (A-C)\sin^2\theta]\operatorname{tang}\omega = 0$$

est l' équation aux tangentes des angles d' inclinaison des axes de la conique sur l'axe des abscisses. Cette équation donne

$$\text{(XXIII)}\qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{(A+C)\cos^2\theta - B\cos\theta + (A-C)\sin^2\theta \pm\sqrt{[(A-C)^2\sin^2\theta + (A\cos\theta - B + C\cos\theta)^2]}}{(B - 2C\cos\theta)\sin\theta}$$

Nous pouvons aussi nous proposer de déterminèr tang2ω. Car l'équation (XXII) donne de suite

$$\text{(XXIV)}\qquad \frac{-(B - 2C\cos\theta)\sin\theta}{(A+C)\cos^2\theta - B\cos\theta + (A-C)\sin^2\theta} = \frac{2\operatorname{tang}\omega}{1 - \operatorname{tang}^2\omega} = \operatorname{tang}2\omega.$$

Telle sont les élémens qui concernent la direction des axes de la conique.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, les quantités cos θ, sin θ sont éguales l'une a zero et l'autre à l'unité ; cette hypothèse reduit les relations qui précèdent aux valeurs suivantes :

$$\text{(XXV)}\qquad Bm^2 - 2(A-C)m - B = 0,$$

$$\text{(XXVI)}\qquad m = \operatorname{tang}\omega = \frac{A - C \mp\sqrt{[B^2 + (A-C)^2]}}{B} = \frac{B}{A - C \mp\sqrt{[B^2 + (A-C)^2]}}$$

$$\text{(XXVII)}\qquad \operatorname{tang}2\omega = -\frac{B}{A-C}.$$

16. *Equation des axes.*

Ces équations sont fournies per l'égualité (XVIII) qui donne

$$\text{(XXVIII)} \qquad (B - 2A\cos\theta)y^2 + (C - A)xy = (B - 2C\cos\theta)x^2 + (A - C)xy,$$

et qui se décompose dans les deux équations linéaires

$$\text{(XXIX)} \qquad (B - 2A\cos\theta)y - (A - C)x \pm x\sqrt{[(A - C)^2 + (B - 2A\cos\theta)(B - 2C\cos\theta)]} = 0,$$

ou

$$\text{(XXX)} \qquad (B - 2C\cos\theta)x - (C - A)y \pm y\sqrt{[(C - A)^2 + (B - 2C\cos\theta)(B - 2A\cos\theta)]} = 0.$$

Telles sont les équations aux axes des sections coniques. Ces équations peuvent encore s'obtenir par la combinaison des équations (XI) du n.° 10 avec l' égualité (12). En effet la première donne

$$\frac{2Ay' + Bx'}{By' + 2Cx'} = -\frac{x''}{y''}$$

et de le dernière on tire

$$-\frac{x''}{y''} = \frac{y' + x'\cos\theta}{x' + y'\cos\theta}$$

de sorte que, si l'on supprime les accents, on aura encore

$$\text{(XXXI)} \qquad \frac{2Ay + Bx}{y + x\cos\theta} = \frac{2Cx + By}{x + y\cos\theta}$$

pour une nouvelle forme de l'équation aux axes de la conique.

17. *Méthode directe pour écrire immédiatement l'équation aux axes de l'éllipse et de l'hypérbole, dans le cas le plus général.*

Soient x', y' les coordonnées d'un sommet de la conique. L'axe, qui passe par ce point est représenté par une équation dont le coéfficient d'inclinaison est

$$m' = \frac{y'-q}{x'-p}:$$

la tangente, qui passe par le même point, a un coéfficient angulaire égal à

$$m'' = -\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}};$$

mais ces deux droites sont perpendiculaires entre elles; par conséquent leurs coéfficients angulaires devront satisfaire à la relation de condition connue

$$1 + m'm'' + (m' + m'') \cos\theta = 0$$

ce qui donne l'équation

$$1 - \frac{y'-q}{x'-p} \times \frac{f'_{x'}}{f'_{y'}} + \left(\frac{y'-q}{x'-p} - \frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}\right) \cos\theta = 0;$$

ou,

$$(f'_{x'} - \cos\theta\, f'_{y'})(y' - y) = (f'_{y'} - \cos\theta\, f'_{x'})(x'-p),$$

qu'on peut encore ecrire

$$\frac{f'_{x'}}{x'-p+(y'-q)\cos\theta} = \frac{f'_{y'}}{y'-q+(x'-p)\cos\theta}.$$

Or je dis que l'équation

$$\text{(XXXII)} \quad (f'_x - \cos\theta\, f'_y)(y-q) = (f'_y - \cos\theta\, f'_x)(x-p),$$

que l'on obtient, en remplaçant dans l'une des ces trois derniers rélations les coordonnées x', y' du sommet par les variables courantes x, y, est précisément le équation aux axes de la conique (1).

En effet, la ligne réprésentée par l'équation (XXXII) passe par chacun des points x', y' et p, q; puisque cette équation est satisfaite par les coordonnées de ces points; de plus, si

l'on remplace, dans cette équation, f'_y, f'_x par leurs valeurs respéctives.

$$2Ay+Bx+D=2Ay+Bx-2Aq-Bp=2A(y-q)+B(x-p),$$

$$By+2Cx+E=By+2Cx-Bq-2Cp=B(y-q)+2C(x-p),$$

ce qui la trasformé en

$$\text{(XXXIII)}\quad (B-2A\cos\theta)(y-q)^2-(A-C)(y-q)(x-p)$$
$$=(B-2C\cos\theta)(x-p)^2-(A-C)(x-p)(y-q)$$

et que l'on résolve cette derniere, on trouve qu'elle se décompose dans les deux équations du prémier degré

$$(B-2A\cos\theta)(y-q)-(A-C)(x-p)$$
$$\pm(x-p)\sqrt{[(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)]}=0$$

ou

$$(B-2C\cos\theta)(x-p)-(C-A)(y-q)$$
$$\pm(y-q)\sqrt{[(C-A)^2+(B-2C\cos\theta)(B-2A\cos\theta)]}=0$$

Donc l'équation (XXXII), qui est du second degré, représente deux droites passant par le centre et par les sommets; donc elle est l'équation aux axes de la conique à centre.

De ce qui précède nous déduisons cette règle bien simple:

Pour avoir l'équation aux axes d'une conique à centre, il suffit de remplacer, dans l'équation de condition

$$1+m'm''+(m'+m'')\cos\theta=0$$

de la rectangularité de deux droites $y=m'x$, $y=m''x$, *les coéfficients* m' *et* m'' *respectivement par les rapports*

$$\frac{y-q}{x-p},\ -\frac{f'_x}{f'_y},$$

ou p *et* q *désigne les coordonnées du centre.*

18. *Grandeurs des axes.*

L'équation aux axes (XXXI) donne, en vertu de (3) et de

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = R^2$$

ou R désigne un demi-axe et x, y les coordonnées du sommet correspondant,

$$\frac{(2Ay + Bx)\,y}{y^2 + xy\cos\theta} = \frac{(2Cx + By)x}{x^2 + xy\cos\theta}$$

$$= \frac{2(Ay^2 + Bxy + Cx^2)}{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta} = -\frac{2H}{R}.$$

Egalant ce rapport à chacun des rapports (XXXI), on trouve

$$(2Ay + Bx)R^2 + 2H(y + x\cos\theta) = 0$$

$$(2Cx + By)R^2 + 2H(x + y\cos\theta) = 0.$$

ou

$$\text{(XXXIV)}\quad \begin{cases} 2(AR^2 + H)y + (BR^2 + 2H\cos\theta)x = 0 \\ 2(CR^2 + H)x + (BR^2 + 2H\cos\theta)y = 0 \end{cases}$$

Ces deux dernières égalités doivent avoir lieu simultanément; pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que le dénominateur commun des valeurs de x et y soit nul. On arrive ainsi à l'équation

$$\text{(XXXV)}\qquad (BR^2+2H\cos\theta)^2 - 4(AR^2+H)(CR^2+H)=0$$

pour celle des demi-axes.

On peut la mettre sous la forme

$$\text{(XXXVI)}\qquad (B^2-4AC)R^4 - 4(A - B\cos\theta + C)HR^2 - 4H^2\sin^2\theta = 0.$$

On en tire

$$\text{(XXXVII)}\ \frac{R^2}{2H} = \frac{A-B\cos\theta+C \pm\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta + (A-B\cos\theta+C)^2]}}{B^2 - 4AC}$$

$$\text{(XXXVIII)}\ \frac{2H}{R^2} = \frac{A-B\cos\theta+C \mp\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta + (A-B\cos\theta+C)^2]}}{B^2 - 4AC}$$

Les deux équations (XXVIII) et (XXXVI) fournissent l'une deux valenr pur $\frac{y}{x}$ et l'autre deux valeurs pour R^2: or il est indispensable de savoir quelle valeur de $\frac{y}{x}$ convient à l'une ou à l'autre des valeurs de R^2.

Pour savoir quelles sont les valeurs qui se correspondent, retournons aux équations (XXXIV), qui donnent

$$\frac{y}{x}=-\frac{BR^2+2H\cos\theta}{2(AR^2+H)}=-\frac{2(CR^2+H)}{BR^2+2H\cos\theta}.$$

Multipliant les deux termes de la première fraction par $\cos\theta$, et rétrachant du produit ceux de la seconde, on obtient

$$\text{(XXXIX)}\qquad \frac{y}{x}=\frac{-2C+B\cos\theta-\frac{2H}{R^2}\sin^2\theta}{B-2A\cos\theta}.$$

Remplaçons maintenant $-\frac{2H}{R^2}\sin^2\theta$ par les deux valeurs (XXXVIII) et nous trouvons

$$\frac{y}{x}=\frac{A-C\mp\sqrt{[(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)]}}{B-2A\cos\theta}.$$

Nous voyons donc que les signes du radical dans la valeur (XXXVII) ou (XXXVIII) de R^2 correspondent aux signes de même place dans la valeur de $\frac{y}{x}$ tirée de (XXVIII).

Dans le cas où les axes des coordonnées sont réctangulaires, les formules, que nous venons de trouver prennent une plus grande simplicité; elle deviennent

$$\text{(XL)}\qquad (B^2-4AC)R^4-4(A+C)HR^2-4H^2=0$$

$$\text{(XLI)}\qquad R^2=\frac{2H}{B^2-4AC}\times\left[A+C\pm\sqrt{[B^2+(A-C)^2]}\right].$$

19. *Rapport des axes.*

Il ne sera pas inutile de calculer l'expression du rapport $\frac{R'}{R''}$. Pour l'obtenir, prenons pour $\frac{R'^2}{2H}$ la valeur

$$\frac{A-B\cos\theta+C+\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta+(A-B\cos\theta+C)^2]}}{B^2-4AC}$$

et pour $\frac{R''^2}{2H}$ la valeur

$$\frac{-\sin^2\theta}{A-B\cos\theta+C+\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta+(A-B\cos\theta+C)^2]}}$$

Si nous divisons ces deux quantités membre à membre, nous trouverons immédiatement

$$\text{(XLII)}\quad \frac{R'}{R''}=\frac{A-B\cos\theta+C+\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta+(A-B\cos\theta+C)^2]}}{\sin\theta\sqrt{(4AC-B^2)}}$$

Nous aurions de même

$$\text{(XLIII)}\quad \frac{R''}{R'}=\frac{A-B\cos\theta+C-\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta+(A-B\cos\theta+C)^2]}}{\sin\theta\sqrt{(4AC-B^2)}}$$

Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, ces rapports deviennent

$$\text{(XLIV)}\quad \frac{R'}{R''}=\frac{A+C+\sqrt{[B^2+(A-C)^2]}}{\sqrt{(4AC-B^2)}},$$

$$\frac{R''}{R'}=\frac{A+C-\sqrt{[B^2+(A-C)^2]}}{\sqrt{(4AC-B^2)}}.$$

20. *Coordonnées des sommets.*

Cherchons d'abord l'équation aux carrés des abscisses. Nous avons déjà trouvé au n.° 7 que

$$x'^2+x''^2=\frac{4AH}{B^2-4AC};$$

il nous suffira donc de calculer le produit $x'^2x''^2$.

Pour avoir ce produit, nous ferons observer que les équations (XXIX) nous donnent la différence

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y'}{x'}-\frac{y''}{x''}\right)=\frac{\sqrt{[(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)]}}{B-2A\cos\theta}.$$

Or nous avons aussi, en vertu de (VIII) du n.° 7.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{y'}{x'}-\frac{y''}{x''}\right)^2=\frac{(y'x''-x'y'')^2}{4x'^2x''^2}=\frac{-H^2}{B^2-4AC}\times\frac{1}{x'^2x''^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, après avoir élevé celle-ci au carré, nous obtenons l'équation

$$-\frac{H^2}{B^2-4AC}\times\frac{1}{x'^2x''^2}=\frac{(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)}{(B-2A\cos\theta)^2};$$

d'où nous tirons

$$x'^2x''^2=-\frac{H^2}{B^2-4AC}\times\frac{(B-2A\cos\theta)^2}{(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)}.$$

Ainsi l'*équation aux carrés des abscisses est*

$$\text{(XLV)}\qquad (B^2-4AC)x^4-4AHx^2$$
$$-\frac{(B-2A\cos\theta)^2H^2}{(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)}=0.$$

Celle aux carrés des ordonnées est par conséquent

$$\text{(XLVI)}\qquad (B^2-4AC)y^4-4CHy^2$$
$$-\frac{(B-2C\cos\theta)^2H^2}{(A-C)^2+(B-2C\cos\theta)(B-2A\cos\theta)}=0.$$

Ces équations donnent

$$\text{(XLVII)}\qquad x^2=\frac{H}{B^2-4AC}$$
$$\times\frac{2A(A-B\cos\theta+C)+B^2-4AC\pm2A\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta+(A-B\cos\theta+C)^2]}}{\pm\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta+(A-B\cos\theta+C)^2]}}$$

$$\text{(XLVIII)} \qquad y^2 = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}}$$

$$\times \frac{2\mathrm{C}(\mathrm{A} - \mathrm{B}\cos\theta + \mathrm{C}) + \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} \pm 2\mathrm{C}\sqrt{[(\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC})\sin^2\theta + (\mathrm{A} - \mathrm{B}\cos\theta + \mathrm{C})^2]}}{\pm\sqrt{[(\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC})\sin^2\theta + (\mathrm{A} - \mathrm{B}\cos\theta + \mathrm{C})^2]}}$$

pour les coordonnées des sommets de la section conique à centre.

Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires les équations que nous venons d'obtenir se simplifient et deviennent

$$\text{(XLIX)} \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC})x^4 - 4\mathrm{AH}x^2 - \dfrac{\mathrm{B}^2\mathrm{H}^2}{\mathrm{B}^2 + (\mathrm{A} - \mathrm{C})^2} = 0 \\[2ex] (\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC})y^4 - 4\mathrm{CH}y^2 - \dfrac{\mathrm{B}^2\mathrm{H}^2}{\mathrm{B}^2 + (\mathrm{A} - \mathrm{C})^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{(L)} \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}} \\[2ex] \times \dfrac{2\mathrm{A}(\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} \pm 2\mathrm{A}\sqrt{[\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} + (\mathrm{A} + \mathrm{C})^2]}}{\pm\sqrt{[\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} + (\mathrm{A} + \mathrm{C})^2]}}; \\[2ex] y^2 = \dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}} \\[2ex] \times \dfrac{2\mathrm{C}(\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} \pm 2\mathrm{C}\sqrt{[\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} + (\mathrm{A} + \mathrm{C})^2]}}{\pm\sqrt{[\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} + (\mathrm{A} + \mathrm{C})^2]}}. \end{array} \right.$$

Dans toutes les valeurs, qui concernent les coordonnées des sommets, les signes des radicaux corréspondent aux signes de même place dans les valeurs de m e de R^2.

21. *Carré de l'excéntricité.*

Les coniques à centre ont deux système de foyers: deux foyers réels et situés sur le grand axe, ou sur l'axe trans-

verse de la courbe, suivant que cette dernière est une ellipse ou une hyperbole; deux autres foyers, toujours imaginaires, corréspondant à l'autre axe de la ligne du second ordre. A ces deux systémes de foyers répondent deux excentricités, dont la seconde est toujours imaginaire, ainsi que deux systèmes de directrices, dont les deux dernières sont constamment imaginaires. Les deux excentricités sont données par la formule

$$c^2 = \pm (R'^2 - R''^2).$$

En y remplaçant R'^2 et R''^2 par leurs valeurs (XXXVIII), on obtient

$$\text{(LI)} \quad c^2 = \pm \frac{4H}{B^2 - 4AC} \times \sqrt{[B^2 - 4AC)\sin^2\theta + (A - B\cos\theta + C)]^2}$$

pour les carrés des deux excentricités.

Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires; ces valeurs deviénnent

$$\text{(LII)} \qquad c^2 = \pm \frac{4H}{B^2 - 4AC} \times \sqrt{[B^2 - 4AC + (A + C)]^2}$$

22. *Coordonnées des foyers.*

Désignons en général ces coordonnées par α, et β. Nous avons les proportions

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{c}{R},$$

d'où nous tirons

$$\alpha = \frac{cx}{R}, \ \beta = \frac{cy}{R}.$$

Or la relation (XXXIX), qui précède, pouvant se mettre sous la forme

$$c^2x^2 = \frac{4H}{B^2 - 4AC} \times (AR^2 + H),$$

nous donne

$$\frac{c^2x^2}{R^2}=\frac{2H}{B^2-4AC}\left(2A+\frac{2H}{R^2}\right).$$

Remplaçant $\frac{2H}{R^2}$ par sa valeur (XXXVIII), nous trouvons

$$\text{(LIII)}\qquad \alpha^2=\frac{2H}{B^2-4AC}$$

$$\times\frac{A-C+(B-2A\cos\theta)\cos\theta\pm\sqrt{[(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)]}}{\sin^2\theta}$$

et de même par analogie,

$$\text{(LIV)}\qquad \beta^2=\frac{2H}{B^2-4AC}$$

$$\times\frac{C-A+(B-2C\cos\theta)\cos\theta\pm\sqrt{[(C-A)^2+(B-2C\cos\theta)(B-2A\cos\theta)]}}{\sin^2\theta},$$

pour les coordonnées des quatre foyers de la section conique.

Représentons par $\pm\alpha'$, $\pm\alpha''$ les abscisses des quatre foyers, par $\pm\beta'$, $\pm\beta''$ les ordonnées correspondantes. Les valeurs précédentes nous donnent

$$\alpha'^2+\alpha''^2=\frac{4H}{B^2-4AC}\times\frac{A-C+(B-2A\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

$$\alpha'^2\alpha''^2=\frac{4H}{B^2-AC}\times\frac{-(B-2A\cos\theta)^2H}{(B^2-4AC)\sin^2\theta}.$$

Nous en déduisons, par conséquent

$$\text{(LV)}\qquad (B^2-4AC)\sin^2\theta.\alpha^4-4[A-C+(B-2A\cos\theta)\cos\theta]H\alpha^2$$

$$-\frac{4(B-2A\cos\theta)^2H^2}{B^2-4AC}=0$$

pour l'équation aux abscisses des foyers.

L'équation aux ordonnées des quatre foyers est de même

$$\text{(LVI)}\quad (B^2-4AC)\sin^2\theta.\beta^4-4[C-A+(B-2C\cos\theta)\cos\theta]H\beta^2 - \frac{4(B-2C\cos\theta)^2H^2}{B^2-4AC}=0.$$

Si les axes des coordonnées sont rectangulaires, les quatre équations précédentes se changent en

$$\text{(LVII)}\left\{\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{2H}{B^2-4AC}\left[A-C\pm\sqrt{[B^2+(A-C)^2]}\right],\\ \beta^2 &= \frac{2H}{B^2-4AC}\left[C-A\pm\sqrt{[B^2-(C-A)^2]}\right].\end{aligned}\right.$$

$$\text{(LVIII)}\left\{\begin{aligned} &(B^2-4AC)\alpha^4-4(A-C)H\alpha^2-\frac{4B^2H^2}{B^2-4AC}=0,\\ &(B^2-4AC)\beta^4-4(C-A)H\beta^2-\frac{4B^2H^2}{B^2-4AC}=0,\end{aligned}\right.$$

23. *Equations des directrices.*

La directrice perpendiculaire à l'axe $x'y-y'x=0$, et qui corréspond au sommet x', y' est nécessairement réprésentée par une équation de la forme

$$(13)\qquad x''y-y''x+k=0$$

où le terme indépendant k est à trouver.

Pour détérminer k, nous remarquerons que la distance

$$(14)\qquad \frac{k\sin\theta}{\sqrt{(x''^2+y''^2+2x''y''\cos\theta)}}=\frac{k\sin\theta}{R''}$$

du centre a la droite (13) est egale à

$$(15)\qquad \frac{R'^2}{c'}.$$

Egalant les deux quantités (14) et (15) nous trouvons

$$\text{(LIX)} \qquad x''y - y''x + \frac{R'^2R''}{c'\sin\theta} = 0$$

pour l'équation de notre directrice.

L'équation de la directrice parallèle sera de même

$$\text{(LX)} \qquad x''y - y''x - \frac{R'^2R''}{c'\sin\theta} = 0\,;$$

de sorte que

$$\text{(LXI)} \qquad (x''y - y''x)^2 - \frac{R'^4R''^2}{c'^2\sin^2\theta} = 0\,;$$

est l'équation aux directrices perpendiculaires à l'axe

$$x''y - y''x = 0\,.$$

On verrait de même que

$$\text{(LXII)} \qquad (x'y - y'x)^2 - \frac{R'^2R''^4}{c''^2\sin^2\theta} = 0$$

est l'équation aux directrices perpendiculaires à l'axe

$$x'y - y'x = 0.$$

24. *Diamètres conjugués de l'ellipse.*

Désignons par n le coéfficient angulaire et par a la grandeur de l'un de ces demi-diamètres. Puisque $2a^2 = R'^2 + R''^2$ l'équation (XXXVI) du n.° 18 nous donne immédiatement

$$\text{(LXIII)} \qquad a^2 = \frac{2(A - B\cos\theta + C)H}{B^2 - 4AC}\,.$$

Pour avoir n, soient x, y les coordonnées de l'extrèmité de a; nous avons d'abord $y = nx$, puis

$$y^2 + x^2 + 2xy\cos\theta = a^2\,;$$

nous en tirons

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + n^2 + 2n\cos\theta}\,, \quad y^2 = \frac{a^2n^2}{1 + n^2 + 2n\cos\theta}\,.$$

Si nous mettons ces valeurs dans l'équation (3) de l'ellipse

nous obtiendront la relation

$$(16)\qquad \frac{An^2 + Bn + C}{1 + n^2 + 2n\cos\theta} + \frac{H}{a^2} = 0$$

à l'aide de laquelle il nous sera facile de determiner n.

En effet cette équation nous donné

$$(17)\quad (Aa^2 + H)n^2 + (Ba^2 + 2H\cos\theta)n + Ca^2 + H = 0.$$

et, en remplaçant a^2 par sa valeur (LXIII),

$$\text{(LXIV)}\qquad \begin{aligned} &[2A(A - C) + B(B - 2A\cos\theta)]n^2 \\ &+ [A(B - 2C\cos\theta) + C(B - 2A\cos\theta)]n \\ &+ [2C(C - A) + B(B - 2C\cos\theta)] = 0. \end{aligned}$$

Cette équation donne les deux directions, ou les équations des deux diamètres conjugés égaux de l'ellipse. On en déduit facilement

$$\text{(LXV)}\quad n = \frac{-A(B-2C\cos\theta) - C(B-2A\cos\theta) \pm \sqrt{[4AC-B^2]} \times \sqrt{[B^2 - 4AC)\sin^2\theta + (A - B\cos\theta + C)^2]}}{2A(A - C) + B(B - 2A\cos\theta)}$$

$$\text{(LXVI)}\ n = \frac{2C(C - A) + B(B - 2C\cos\theta)}{-A(B - 2C\cos\theta) - C(B - 2A\cos\theta) \mp \sqrt{[4AC-B^2]}\sqrt{[(B^2 - 4AC)\sin^2\theta + (A - B\cos\theta + C)^2]}}$$

25. *Angle des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.*

Réprésentons cet angle par U. Le parallélogramme construit sur les diamètres etant égal au rectangle des axes ; nous avons, en vertu de (XXVVI),

$$a^2\sin U = R'R'' = \frac{2H\sin\theta}{\sqrt{(4AC - B^2)}}.$$

Remplaçant a^2 par sa valeur (LXIII), il nous vient

$$\text{(LXVII)}\qquad \sin U = \frac{\sin\theta\sqrt{(4AC - B^2)}}{A - B\cos\theta + C}$$

pour le sinus de l'angle cherché.

Le cosinus du même angle est

$$\text{(LXVIII)}\qquad \cos U = \frac{\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta + (A - B\cos\theta + C^2)]}}{A - B\cos\theta + C}$$

d'où on déduit pour la tangente

$$\text{(LXIX)}\quad \operatorname{tang} U = \frac{\sin\theta\sqrt{(4AC - B^2)}}{\sqrt{[(B^2-4AC)\sin^2\theta + (A - B\cos\theta + C)^2]}}.$$

26. *Equations des asymptotes de l'hyperbole* (1).

Supposons d'abord que l' un au moins des carrés des deux variables se trouve dans l'équation de l'hypērbole, et que ce soit le carré de y ; dans ce cas A n' est pas nul. L'équation de la courbe peut alors se mettre sous la forme

$$\text{(18)}\qquad (2Ay + Bx + D)^2 - (B^2 - 4AC)x^2 \\ - 2(BD - 2AE)x - (D^2 - 4AF) = 0.$$

Posons

$$\varphi(x) = (B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + (D^2 - 4AF).$$

L'équation (1) étant celle d'une hyperbole, $B^2 - 4AC$ est différent de zero, et positif; $\varphi(x)$ peut donc s' exprimer en fonction de $\varphi'(x)$, c'est-à-dire que

$$\varphi(x) = \left[x\sqrt{(B^2-4AC)} + \frac{BD-2AE}{\sqrt{(B^2-4AC)}}\right]^2$$

$$+ \frac{(BD-2AE)^2 - (B^2-4AC)(D^2-4AF)}{B^2-4AC} = 0.$$

ou

$$\varphi(x) = \left[x\sqrt{(B^2-4AC)} + \frac{BD-2AE}{\sqrt{(B^2-4AC)}}\right]^2 + 4AH = 0\ ;$$

de sorte que l'équation de la courbe sera

$$\text{(LXX)}\qquad \left(2Ay + Bx + D + x\sqrt{(B^2-4AC)} + \frac{BD-2AE}{\sqrt{(B^2-4AC)}}\right) \\ \times\left(2Ay + Bx + D - x\sqrt{(B^2-4AC)} - \frac{BD-2AE}{\sqrt{(B^2-4AC)}}\right) \\ = -4AH.$$

Les deux équations des asymptotes sont donc

$$(\text{LXXI})\left\{\begin{array}{l} 2Ay+[B+\sqrt{(B^2-4AC)}]x+D+\dfrac{BD-2AE}{\sqrt{(B^2-4AC)}}=0, \\ \\ 2Ay+[B-\sqrt{(B^2-4AC)}]x+D-\dfrac{BD-2AE}{\sqrt{(B^2-4AC)}}=0. \end{array}\right.$$

27. *Puissance de l'hyperbole.*

La puissance de l'hyperbole est égale à

$$\frac{R'^2-R''^2}{4};$$

mettant à la place de R'^2, et R''^2 leurs valeurs (XXXVII), on trouve que cette puissance est exprimée par la quantité

$$(\text{LXXII}) \quad \frac{H\sqrt{[(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)]}}{B^2-4AC}.$$

28. *Formation de l'équation aux asymptotes de l'hyperbole.*

Multiplions entre elles, membre à membre les deux équations (LXXI) des asymptotes de l'hyperbole (1); nous obtenons

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex-\frac{AE^2+CD^2-BDE}{B^2-4AC}=0.$$

Le terme tout connu, d'après (II), est égal a $F-H$. Il vient donc

$$(\text{LXXIII}) \quad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F-H=0$$

pour l'équation aux asymptotes de l'hyperbole (1). Nous voyons ainsi qu' *on obtient l'équation aux asymptotes de l'hyperbole, en retranchant, du premier membre de l'équation de la courbe, le terme tout connu qui fournit la translation de l'origne des coordonnées au centre de l'hyperbole.*

Nous avons aussi

$$F - H = -\frac{1}{2}(Dq + Ep);$$

l'équation aux asymptotes de l'hyperbole est donc aussi

$$\text{(LXXIV)} \quad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + D\left(y - \frac{q}{2}\right) + E\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0.$$

On voit donc que : *Pour avoir l'équation aux asymptotes de l'hyperbole, il suffit de diminuer les premièrs puissances des variables des demi-coordonnées du centre et de supprimer le terme tout connu.*

29. *Angle des asymptotes de l'hyperbole.*

Pour avoir cet angle, nous aurons recours à la formule (10), qui donne la tangente de l'angle des deux droites $y = m'x$, $y = m''x$. Les équations (LXXI) des asymptotes nous donnent

$$m'' = \frac{-B - \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}, \quad m' = \frac{-B + \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}$$

d'où nous tirons

$$m'' - m' = \frac{-\sqrt{(B^2 - 4AB)}}{A}, \quad m''m' = \frac{C}{A}, \quad m'' + m' = -\frac{B}{A}.$$

Substituant ces valeurs dans (10), nous trouvons que

$$\text{(LXXV)} \qquad \operatorname{tang} W = \frac{-\sin\theta.\sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A - B\cos\theta + C}$$

et par suite,

$$\text{(LXXVI)} \qquad \sin W = \frac{-\sin\theta\sqrt{(B^2 - 4AC)}}{\sqrt{[(A-C)^2 + (B - 2A\cos\theta)(B - 2C\cos\theta)]}},$$

$$\text{(LXXVII)} \quad \cos W = \frac{A - B\cos\theta + C}{\sqrt{[(A-C)^2 + (B - 2A\cos\theta)(B - 2C\cos\theta)]}}.$$



CALCUL DES EXPRESSIONS GÉNÉRALES QUI DONNENT LA VALEUR DES DIVERS ÉLÉMENTS DE LA PARABOLE

PAR GEORGES DOSTOR

Docteur ès sciences mathématiques,
Professeur de mathématiques à Paris.

---

1. Les éléments de la parabole sont le *sommet* et le *foyer* qui détérminent l'*axe* et servent à trouver le *paramètre* et la *directrice*. Nous allons les calculer succéssivément, et, afin de simplifier les opérations, nous mettrons l'équation généralc de la parabole sous la forme

$$(1)\qquad f(x, y) = (y\sqrt{A} + x\sqrt{C})^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Nous supposerons que le coéfficient du rectangle xy soit positif : si le contraire avait lieu, il suffirait de changer le signe de $\sqrt{C}$ dans tout ce qui suit.

Nous admettrons, pour plus de généralité, que les axes des coordonnées soient obliques et inclinés entre eux d'un angle θ. Nous terminérons ce mémoire par la recherche des relations de condition, aux quelles devront satisfaire les coéfficients de l'équation d'une parabole, pour que l'origine et les axes de coordonnées aient des positions données.

2. La forme de l'équation (1) met de suite en relief quelques caractères importants de la parable.

Dans l'équation (1) se trouvent les premiers membres des deux équations linéaires

$$(2)\qquad y\sqrt{A} + x\sqrt{C} = 0\,,$$

$$(3)\qquad Dy + Ex + F = 0.$$

Toutes les droites

$$(4)\qquad y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + k = 0\,,$$

parallèles à (2) ne coupent chacune la parabole qu'en seul point détérminée par le systéme des deux équations (4) et

$$Dy + Ex + F + k^2 = 0.$$

La droite (3) aussi ne rencontre la courbe qu'en point unique donné par les équations (2) et (3); mais les lignes

$$(5) \qquad Dy + Ex + F + l = 0$$

parallèles a cette droite (3) coupent la parabole chacune en deux points, dont les coordonnées sont fournies par les système des équations (5) et

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{C} = \pm\sqrt{-l}.$$

Par conséquent la droite (2) est le diamétre de la parabole issu de l'origine des coordonnées, et la ligne (3) est la tangente à la courbe, menée par l'éxtrémité de ce diamétre.

3. *Direction de l'axe de la parabole.*

La droite

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{C} = 0$$

étant parallèle à l'axe de la courbe, nous avons immédiatement, en designant par ω et ω' les inclinaisons de cet axe sur celui des abscisses et celui des ordonnées

$$(I) \quad \text{tang}\,\omega = \frac{-\sin\theta.\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}}, \quad \text{tang}\,\omega' = \frac{\text{sen}\theta.\sqrt{A}}{\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}};$$

$$(II) \quad \text{tang}2\omega = \frac{(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})2\sin\theta\sqrt{C}}{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}-2(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})^2};$$

$$(III) \quad \text{tang}\,2\omega' = \frac{-(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})2\sin\theta\sqrt{A}}{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}-2(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})^2},$$

et si les axes des coordonnées sont rectangulaires

$$(IV) \quad \text{tang}\omega = -\sqrt{\frac{C}{A}}, \quad \text{tang}2\omega = \frac{2\sqrt{AC}}{C-A} = -\frac{B}{A-C}.$$

4.° *Equation de l'axe.*

Veut-on avoir l'axe et la tangente au sommet ? Il suffira d' introduire au carré de l'équation (1) un terme λ indépendant des variables, et de déterminer λ de manière que les deux droites corréspondant à (2) et (3) soient perpendiculaires entre elles. L'équation (1) devient d'abord

$$(6) \qquad (y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + \lambda)^2 + (D - 2\lambda\sqrt{A})y + (E - 2\lambda\sqrt{C})x + F - \lambda^2 = 0$$

Les deux droites

$$(7) \qquad y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + \lambda = 0,$$

$$(8) \qquad (D - 2\lambda\sqrt{A})y + (E - 2\lambda\sqrt{C})x + F - \lambda^2 = 0,$$

devant être à angle droit, on à, pour détérminer λ, l'équation de condition

$$\sqrt{A}(D - 2\lambda\sqrt{A}) + \sqrt{C}(E - 2\lambda\sqrt{C}) - [\sqrt{A}(E-2\lambda\sqrt{C})+\sqrt{C})+\sqrt{C}(D-2\lambda\sqrt{A})]\cos\theta=0\,;$$

d'où on tire

$$(V) \qquad \lambda = \frac{1}{2}\cdot\frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+\sqrt{C}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})} = \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C} - (D\sqrt{C} + E\sqrt{A})\cos\theta}{2(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})},$$

ou encore

$$(VI) \qquad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{D^2+E^2-2DE\cos\theta}{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}} - \frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})^2\sin^2\theta}{(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2}\right)},$$

et par suite

$$(VII) \quad \begin{cases} D - 2\lambda\sqrt{A} = \dfrac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}}, \\[2ex] E - 2\lambda\sqrt{C} = \dfrac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}}. \end{cases}$$

L'équation de l'axe est donc

$$\text{(VIII)}\quad y\sqrt{A}+x\sqrt{C}+\frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{2(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}=0$$

et dans le cas des coordonnées rectangulaires,

$$\text{(IX)}\qquad y\sqrt{A}+x\sqrt{C}+\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{2(A+C)}=0,$$

5. *Méthode très rapide pour écrire immédiatement, à l'aide des dérivées, l'équation de l'axe.*

Soient m', m'' les coéfficients angulaires de l' axe et de la tangente au sommet p, q; nous avons

$$m'=-\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}},\ m''=-\frac{f'_p}{f'_q}.$$

Ces deux droites sont perpendiculaires entre elles; par conséquent on à la rélation de condition

$$1+\frac{f'_p\sqrt{C}}{f'_q\sqrt{A}}-\left(\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}+\frac{f'_p}{f'_q}\right)\cos\theta=0.$$

Dans cette égualité remplaçons p, q par les variables courantes x, y; il vient l'équation

$$\text{(X)}\qquad (\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})f'_y+(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})f'_x=0,$$

que je dis être l'équation de l'axe de la parabole.

En effet cette équation, du premier degré, est satisfaite par les coordonnées p, q du sommet; par suite elle représente une droite passant par le sommet de la courbe. De plus, comme

$$f'_y=2Ay+Bx+D=2\sqrt{A}(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})+D,$$
$$f'_x=By+2Cx+E=2\sqrt{C}(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})+E$$

elle peut s'écrire

$$2(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})$$
$$+D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})=0$$

ou

$$y\sqrt{A}+x\sqrt{C}+\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta}{2(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}=0.$$

Elle représente donc une droite parallèle à l'axe, donc elle représente l' axe même de la parabole. Nous voyons ansi que :

Pour avoir l'axe de la parabole, il suffit de remplacer dans la relation $1+m'm''+(m'+m'')\cos\theta=0$, m' *et* m'' *réspectivément par* $-\sqrt{\frac{C}{A}}, -\frac{f'_x}{f'_y}$.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'équation de l'axe sera

$$f'_x\sqrt{A}+f'_x\sqrt{C}=0.$$

6. *Equation de la tangente au sommet.*

Si nous mettons dans (8), à la place de

$$D-2\lambda\sqrt{A}, \quad E-2\lambda\sqrt{C}$$

et λ leurs valeurs (VII) et (V) nous trouvons

(XI)
$$(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})y-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})x$$
$$+\frac{F(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}$$
$$-\frac{[D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})]^2}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}=0.$$

ou

(XII)
$$(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})y-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})x$$
$$+\frac{4F(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})-(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{4(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}$$
$$+\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sin^2\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}=0$$

pour l'équation de la tangente au sommet.

7. *Coordonnées du sommet.*

Le sommet est l'intersection des deux droites (VIII) et (XII); il suffira donc de résoudre, par rapport à x et y, les équations des ces droites, pour avoir les coordonnées de ce point.

A fin de simplifier les calculs, nous prendrons les deux équations équivalentes (7) et (8)

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + \lambda = 0,$$

$$(D - 2\lambda\sqrt{A})y + (E - 2\lambda\sqrt{C})x + F - \lambda^2 = 0;$$

qui, étant considérées comme simultanées, donnent pour les coordonnées du sommet

$$\text{(XIII)} \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{F\sqrt{A}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}} + \frac{\lambda(\lambda\sqrt{A}-D)}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}, \\ q &= \frac{F\sqrt{C}}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}} + \frac{\lambda(\lambda\sqrt{C}-E)}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}; \end{aligned} \right.$$

ou, en remplaçant λ par sa valeur (V)

$$\text{(XIV)} \left\{ \begin{aligned} p = {} & \frac{F\sqrt{A}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}} \\ & - \frac{(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})[E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})]}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2} \\ & - \frac{D[E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})]}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}, \\ q = {} & \frac{F\sqrt{C}}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}} \\ & - \frac{(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})[D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})]}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2} \\ & - \frac{E[D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})]}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}; \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(XV)\begin{cases} p = \dfrac{F\sqrt{A}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}} - \dfrac{E-D\cos\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})} \\ \quad - \dfrac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})} \\ \quad \times \dfrac{D}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}} - \dfrac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{A}\sin^2\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2}, \\ q = \dfrac{F\sqrt{C}}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}} - \dfrac{D-E\cos\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})} \\ \quad - \dfrac{E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})} \\ \quad \times \dfrac{E}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}} - \dfrac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{C}\sin^2\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2}. \end{cases}$$

8. *Translation de l'origine au sommet de la parabole.*

Avant de déterminer les coordonnées du foyer et l'équation de la diréctrice, transportons l'origine des coordonnées au sommet p, q de la parabole. Si nous remplaçons dans l'équation (1) les variables per $x+p$, $y+q$, elle diviendra

$$(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})^2+yf'_q+xf'_p+(q\sqrt{A}+p\sqrt{C})^2 \\ +Dp+Eq+F=0,$$

ou

$$(9) \qquad (y\sqrt{A}+x\sqrt{C})^2+yf'_q+xf'_p=0$$

attendu que le terme tout connu doit être nul, puisque le point p, q appartient à la courbe.

Dans l'équation (9) il s'agit de remplaçer f'_q, f'_p par leurs valeurs. Or, en vertu de la relation (7)

$$q\sqrt{A}+p\sqrt{C}+\lambda=0$$

et, par suite des valeurs (VII), nous avons :

$$f'_q = 2Aq + 2p\sqrt{AC} + D = 2\sqrt{A}(q\sqrt{A} + q\sqrt{C}) + D$$

$$= D - 2\lambda\sqrt{A} = \frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A + C - 2\sin\theta\sqrt{AC}},$$

$$f'_p = 2q\sqrt{AC} + 2pC + E = 2\sqrt{C}(q\sqrt{A} + p\sqrt{C}) + E$$

$$= E - 2\lambda\sqrt{C} = \frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (9), nous trouvons

$$\text{(XVI)} \qquad (y\sqrt{A} + x\sqrt{C})^2 + \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}}$$
$$\times [(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})y - (\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})x] = 0$$

pour l' équation de la parabole rapportée à son sommet comme origine des coordonnées.

9. *Valeur du paramètre.*

Représentons ce paramètre par 2P, et désignons par Y, X les distances respectives d'un point quelconque x, y de la parabole à l'axe

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{C} = 0,$$

et à la tangente au sommet

$$(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})y - (\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})x = 0.$$

Nous avons

$$\text{(10)} \qquad Y^2 = 2PX$$

Or, il est aisé de voir que

$$Y = \frac{(y\sqrt{A} + x\sqrt{C})\sin\theta}{\sqrt{(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})}},$$

$$X = \frac{(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})y - (\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})x}{-\sqrt{(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})}}.$$

Mettant ces valeurs dans la relation (10) nous obtenons l'équation

$$\frac{(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})^2\sin^2\theta}{\sqrt{(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}}$$

$$=2P[\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})y-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})x],$$

ou

$$(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})^2=-\frac{2P}{\sin^2\theta}\sqrt{(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}$$

$$\times\ [(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})y-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})x],$$

qui, devant être identique avec (XVI), exige que l'on ait

$$\frac{2P}{\sin^2\theta}\sqrt{(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}=\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}};$$

d'où l'on tire

$$\text{(XVII)}\qquad 2P=\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sin^2\theta}{(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^{\frac{3}{2}}}$$

pour l'expression du paramètre.

Comme on a la quantité

$$A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}=(\sqrt{A}-\sqrt{C})^2+2\sqrt{AC}(1-\cos\theta)$$

$$=(\sqrt{A}-\sqrt{C})^2+4\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{AC},$$

le denominateur de 2P est positif; si donc, nous supposons que l'on ait

$$D\sqrt{C}-E\sqrt{A}>0$$

le paramètre 2P sera positif.

10. *Coordonnées du foyer.*

Représentons par α, β les coordonnées du foyer rapporté au sommet de la parabole comme origine des coordonnées; par u, v les coordonnées du même point rapportées à la même origine que la parabole exprimée par l'équation

(1); nous avons

$$(11) \qquad u = p + \alpha, \qquad v = q + \beta.$$

Le foyer α, β étant situé sur l'axe

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{C} = 0,$$

les coordonnées α, β satisfont à cette équation ; ce qui donne

$$\frac{\alpha}{\sqrt{A}} = -\frac{\beta}{\sqrt{C}};$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha^2}{A} = \frac{\beta^2}{C} = \frac{2\alpha\beta\cos\theta}{-2\cos\theta\sqrt{AC}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}}$$

$$= \frac{4P^2}{16(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})},$$

attendu que

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta = \frac{P^2}{4}.$$

On trouve donc, en ayant égard à la valeur (XVII),

$$(\text{XVIII}) \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{2P\sqrt{A}}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^{\frac{1}{2}}} = \frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{A}\sin^2\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2} \\ &= \frac{(BD-2AE)\sin^2\theta}{8(A-B\cos\theta+C)^2}, \\ \beta &= \frac{-2P\sqrt{C}}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^{\frac{1}{2}}} = \frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{C}\sin^2\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2} \\ &= \frac{(BE-2CD)\sin^2\theta}{8(A-B\cos\theta+C)^2}. \end{aligned} \right.$$

Subsistuant ces expressions dans les équations (11), en tenant compte des valeurs (XV), nous obtenons

$$u = \frac{F\sqrt{A}}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}$$

$$- \frac{(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})[E(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A}) + D(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})] - (D\sqrt{C} - E\sqrt{A})\sqrt{A}\sin^2\theta}{4(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})^2}$$

$$- \frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+\sqrt{C}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})} \times \frac{D}{4(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})},$$

$$v = \frac{F\sqrt{C}}{E\sqrt{A} - D\sqrt{C}}$$

$$- \frac{(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})[D(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C}) + E(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})]}{4(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})^2}$$

$$- \frac{(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})\sqrt{C}\sin^2\theta}{4(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})^2}$$

$$- \frac{E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{\sqrt{C}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+\sqrt{A}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})} \times \frac{E}{4(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})};$$

ou, en effectuant les reductions au numérateur des seconds termes,

$$(\text{XIX})\left\{\begin{aligned} u &= \frac{F\sqrt{A}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}} - \frac{E - D\cos\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})} \\ &- \frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+\sqrt{C}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})} \times \frac{D}{4(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}, \\ v &= \frac{F\sqrt{C}}{E\sqrt{C}-D\sqrt{A}} - \frac{D - E\cos\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})} \\ &- \frac{E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{\sqrt{C}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+\sqrt{A}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})} \times \frac{E}{4(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}; \end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(\mathrm{XX})\left\{\begin{aligned}
u &= \frac{BF}{2CD-BE} - \frac{E - D\cos\theta}{4(A-B\cos\theta+C)} \\
&+ \frac{D(B-2C\cos\theta)+E(2C-B\cos\theta)}{A-B\cos\theta+C} \times \frac{D}{4(2CD-BE)}, \\
v &= \frac{BF}{2AE-BD} - \frac{D - E\cos\theta}{4(A-B\cos\theta+C)} \\
&+ \frac{E(B-2A\cos\theta)+D(2A-B\cos\theta)}{A-B\cos\theta+C} \times \frac{E}{4(2AE-BD)};
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les expressions générales des coordonnées du foyer. On peut encore donner à ces valeurs une forme plus simple, si l'on a soin de réduire entre eux les deux derniers termes de chacune d'elles. On trouvera ainsi que

$$(\mathrm{XXI})\left\{\begin{aligned}
u &= \frac{F\sqrt{A}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}} - \frac{(D^2-E^2)\sqrt{A}+2D(E-D\cos\theta)\sqrt{C}}{4(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}, \\
v &= \frac{F\sqrt{C}}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}} - \frac{(E^2-D^2)\sqrt{C}+2E(D-E\cos\theta)\sqrt{A}}{4(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}.
\end{aligned}\right.$$

ou

$$(\mathrm{XXII})\left\{\begin{aligned}
u &= \frac{BF}{2CD-BE} - \frac{(D^2-E^2)B-4CD(E-D\cos\theta)}{4(A-B\cos\theta+C)(2CD-BE)}, \\
v &= \frac{BF}{2AE-BD} - \frac{(E^2-D^2)B-4AE(D-E\cos\theta)}{4(A-B\cos\theta+C)(2AE-BD)}.
\end{aligned}\right.$$

11. *Equation de la droite perpendiculaire à l'axe menée par le foyer.*

Cette droite est parallèle à la tangente au sommet (XII) et passe par le point u, v; elle est donc réprésentée par l'équation

$$(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})y-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})x$$
$$+(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})u-(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})v=0,$$

où il suffira de mettre à la place de u et v leurs valeurs (XXI). Cette substitution changera l'équation précédente en

$$\text{(XXIII)}\qquad (\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})y-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})x$$
$$+\frac{4F(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})-(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{4(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}$$
$$+\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sin^2\theta}{2(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}=0.$$

12. *Coordonnées du pied de la directrice.*

Représentons par α', β' les coordonnées du pied de la directrice rapportées au sommet comme origine des coordonnées, et par u', v' les coordonnées du même point rapportées à l'origine de départ. Nous avons

$$\text{(12)}\qquad u'=p+\alpha',\quad v'=q+\beta';$$

or on sait que

$$\alpha'=-\alpha=\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{A}\sin^2\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2}=\frac{(2AE-BD)\sin^2\theta}{8(A-B\cos\theta+C)^2},$$

$$\beta'=-\beta=\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{C}\sin^2\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2}=\frac{(2CD-BE)\sin^2\theta}{8(A-B\cos\theta+C)^2};$$

mettant ces valeurs, ainsi que celles (XV) de p et q dans l'équation (12) et effectuant les réductions convenables, on trouve pour les coordonnées du pied de la directrice

$$
\text{(XXIV)}\left\{
\begin{aligned}
u' &= \frac{F\sqrt{A}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}} - \frac{E-D\cos\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})} \\
&\quad - \frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{A}\sin^2\theta}{2(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2} \\
&\quad - \frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}\times\frac{D}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}, \\
v' &= \frac{F\sqrt{C}}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}} - \frac{D-E\cos\theta}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})} \\
&\quad - \frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{C}\sin^2\theta}{2(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2} \\
&\quad - \frac{E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}\times\frac{E}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}};
\end{aligned}\right.
$$

ou encore

$$
\text{(XXV)}\left\{
\begin{aligned}
u' &= \frac{BF}{2CD-BE} - \frac{E-D\cos\theta}{4(A-B\cos\theta+C)} - \frac{(BD-2AE)\sin^2\theta}{4(A-B\cos\theta+C)^2} \\
&\quad - \frac{D(B-2C\cos\theta)+E(2C-B\cos\theta)}{4(A-B\cos\theta+C)}\times\frac{D}{2CD-BE}, \\
v' &= \frac{BF}{2AE-BD} - \frac{D-E\cos\theta}{4(A-B\cos\theta+C)} - \frac{(BE-2CD)\sin^2\theta}{4(A-B\cos\theta+C)^2} \\
&\quad - \frac{E(B-2A\cos\theta)+D(2A-B\cos\theta)}{4(A-B\cos\theta+C)}\times\frac{E}{2AE-BD}.
\end{aligned}\right.
$$

13. *Equation de la directrice.*

La directrice est parallèle à la tangente au sommet, en

même temps qu'elle passe par le point u', v', son équation est donc

$$(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})y - (\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})x$$
$$+ (\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})u' - (\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})v' = 0,$$

ou, en remplaçant u', et v' par leurs valeurs (XXIV)

$$\text{(XXVI)}\quad (\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})y - (\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})x$$
$$+ \frac{4F(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}) - (D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{4(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})} = 0$$

ou bien

$$\text{(XXVII)}\quad (B - 2A\cos\theta)y - (2A - B\cos\theta)x$$
$$+ \frac{4AF(A - B\cos\theta + C) - (D^2 + E^2 - 2DE\cos\theta)A}{BD - 2AE} = 0,$$

14. *Valeur des divers éléments de la parabole dans le cas où les axes des coordonnées sont perpendiculaires.*

Pour des axes rectangulaires il suffira de faire $\theta = 90°$ dans les formules précédentes. Nous obtenons ainsi

$$\text{(XXVIII)}\quad \left\{ \begin{array}{l} \tan\omega = -\sqrt{\dfrac{C}{A}} = -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{2C}{B}, \\ \tan 2\omega = \dfrac{2\sqrt{AC}}{C - A} = \dfrac{B}{C - A} \end{array} \right.$$

pour l'*inclinaison de l'axe de la parabole sur celui des abscisses.*

$$\text{(XXIX)}\quad y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{2(A + C)} = 0,$$

pour *l'équation de l'axe.*

$$(\mathrm{XXX})\left\{\begin{array}{l} y\sqrt{C}-x\sqrt{A}+\dfrac{4F(A+C)-(D^2+E^2)}{4(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}+\dfrac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{4(A+C)}=0,\\[2ex] By-2Ax+\dfrac{(D^2-4AF+E^2-4CF)A}{BD-2AE}+\dfrac{BD-2AE}{4(A+C)}=0,\\[2ex] 2Cy-Bx+\dfrac{(D^2-4AF+E^2-4CF)C}{2CD-BE}+\dfrac{2CD-BE}{4(A+C)}=0,\end{array}\right.$$

pour *l'équation de la tangente au sommet:*

$$p=\frac{F\sqrt{A}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}-\frac{E}{4(A+C)}-\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{A}}{4(A+C)^2}-\frac{D(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})}{4(A+C)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})},$$

$$q=\frac{F\sqrt{C}}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}-\frac{D}{4(A+C)}-\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{C}}{4(A+C)^2}-\frac{E(E\sqrt{C}+D\sqrt{A})}{4(A+C)(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})},$$

ou, en réduisant

$$(\mathrm{XXXI})\left\{\begin{array}{l} p=\dfrac{E}{4(A+C)}+\dfrac{(E\sqrt{C}+D\sqrt{A})\sqrt{C}}{4(A+C)^2}+\dfrac{(E^2-4CF+D^2-4AF)\sqrt{A}}{4(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(A+C)},\\[2ex] q=\dfrac{D}{4(A+C)}+\dfrac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})\sqrt{A}}{4(A+C)^2}+\dfrac{(D^2-4AF+E^2-4CF)\sqrt{C}}{4(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})(A+C)},\end{array}\right.$$

ou encore

$$(\mathrm{XXXII})\left\{\begin{array}{l} p=\dfrac{E}{4(A+C)}+\dfrac{BD+2CE}{8(A+C)^2}+\dfrac{(E^2-4CF+D^2-4AF)A}{2(BD-2AE)(A+C)},\\[2ex] q=\dfrac{D}{4(A+C)}+\dfrac{BE+2AD}{8(A+C)^2}+\dfrac{(D^2-4AF+E^2-4CF)C}{2(BE-2CD)(A+C)}\end{array}\right.$$

pour *les coordonnées du sommet.*

$$\text{(XXXIII)} \quad 2P = \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{(A+C)\sqrt{(A+C)}} = \frac{BD - 2AE}{(A+C)\sqrt{(B^2+4A^2)}}$$

$$= \frac{2CD - BE}{(A+C)\sqrt{(B^2+4C^2)}}$$

pour *la valeur du paramètre,*

$$\text{(XXXIV)} \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{E}{2(A+C)} + \frac{E^2-4CF+D^2-4AF}{4(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} \times \frac{\sqrt{A}}{A+C} \\ &= \frac{E}{2(A+C)} + \frac{E^2-4CF+D^2-4AF}{2(BD-2AE)} \times \frac{A}{A+C} \\ v &= \frac{D}{2(A+C)} + \frac{D^2-4AF+E^2-4CF}{4(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})} \times \frac{\sqrt{C}}{A+C} \\ &= \frac{D}{2(A+C)} + \frac{D^2-4AF+E^2-4CF}{2(BE-2CD)} \times \frac{C}{A+C} \end{aligned} \right.$$

pour *les coordonnées du foyer.*

$$\text{(XXXV)} \left\{ \begin{aligned} & y\sqrt{C} - x\sqrt{A} + \frac{D^2-4AF+E^2-4CF}{4(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})} + \frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{2(A+C)} = 0, \\ & 2Cy - Bx + \frac{(D^2-4AF+E^2-4CF)C}{BE-2CD} + \frac{2CD-BE}{2(A+C)} = 0, \\ & By - 2Ax + \frac{(D^2-4AF+E^2-4CF)A}{2AE-BD} + \frac{BD-2AE}{2(A+C)} = 0, \end{aligned} \right.$$

pour *la droite menée par le foyer perpendiculairment à l'axe.*

$$\text{(XXXVI)} \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{(E\sqrt{C}+D\sqrt{A})\sqrt{C}}{2(A+C)^2} + \frac{E^2-4CF+D^2-4AF}{4(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} \times \frac{\sqrt{A}}{A+C}, \\ v' &= \frac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})\sqrt{A}}{2(A+C)^2} + \frac{D^2-4AF+E^2-4CF}{4(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})} \times \frac{\sqrt{C}}{A+C}; \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(\text{XXXVII})\begin{cases} u'=\dfrac{2CE+BD}{4(A+C)^2}+\dfrac{E^2-4CF+D^2-4AF}{2(BD-2AE)}\times\dfrac{A}{A+C}, \\ v'=\dfrac{2AD+BE}{4(A+C)^2}+\dfrac{D^2-4AF+E^2-4CF}{2(BE-2CD)}\times\dfrac{C}{A+C}; \end{cases}$$

pour *les coordonnées du pied de la directrice.*

$$(\text{XXXVIII})\begin{cases} y\sqrt{C}-x\sqrt{A}+\dfrac{D^2-4AF+E^2-4CF}{4(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}=0, \\ 2Cy-Bx+\dfrac{(D^2-4AF+E^2-4CF)C}{BE-2CD}=0, \\ By-2Ax+\dfrac{(D^2-4AF+E^2-4CF)A}{2AE-BD}=0, \end{cases}$$

pour *l'équation de la directrice.*

15. *Condition pour que l'origine des coordonnées soit située sur l'axe de la parabole.*

Dans ce cas l'équation (VIII) de l'axe devra être de la forme $my+nx=0$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})=0$$

d'où l'on déduit

$$(\text{XXXIX})\quad \frac{D}{E}=-\frac{\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}}=\frac{B-2A\cos\theta}{B\cos\theta-2A}$$
$$=\frac{B\cos\theta-2C}{B-2C\cos\theta},$$

pour des axes obliques, et

$$\frac{D}{E}=-\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}=-\frac{B}{2A}=-\frac{2C}{B}$$

ou

(XL) $$BD + 2CE = BE + 2AD = 0$$

pour des axes rectangulaires.

16. *Condition pour que l'origine des coordonnées soit située sur la tangente au sommet de la parabole.*

Cette condition est moins simple que la précédente; elle se déduit de l'équation (XII) de la tangente, qui donne

(XLI) $$\pm 2\sqrt{F} = \frac{D(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C}) + E(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C}) + \sqrt{C}(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})}$$

pour des coordonnées obliques, et

(XLII) $$\pm 2\sqrt{F} = \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{A + C}$$

pour des axes rectangulaires.

17. *Condition pour que l'origine des coordonnées soit située sur la droite menée par le foyer perpendiculairement à l'axe.*

Le terme tout connu de l'équation (XXIII) de cette droite devra être nul; on devra donc avoir

$$4F(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}) = D^2 + E^2 - 2DE\cos\theta - \frac{2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})^2\sin^2\theta}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}},$$

d'où l'on tire

(XLIII) $$4F = \frac{[D(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C}) + E(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})]^2 - (D\sqrt{C} - E\sqrt{A})^2\sin^2\theta}{(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})^2}$$

pour des axes obliques, et

(XLIV) $$4F = \frac{(D\sqrt{A} + E\sqrt{C})^2 - (D\sqrt{C} - E\sqrt{A})^2}{(A + C)^2} = \frac{(D^2 - E^2)(A - C) + BDE}{(A + C)^2}$$

pour des coordonnés rectangulaires.

18. *Condition pour que l'origine des coordonnées soit située sur la directrice.*

Elle s'obtient en annulant le terme connu de l'équation (XXVI) de la directrice. On trouve ainsi l'égalité

$$\text{(XLV)}\quad 4F = \frac{D^2 + E^2 - 2\cos\theta DE}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}} = \frac{D^2 + E^2 - 2DE\cos\theta}{A + C - 2B\cos\theta}$$

pour la relation demandée dans le cas des axes obliques, et

$$\text{(XLVI)}\quad 4F = \frac{D^2 + E^2}{A + C}$$

pour des axes rectangulaires.

19. *Conditions pour que l'origine des coordonnées soit au sommet de la parabole.*

L'origine se trouvant à la fois sur l'axe et sur la tangente au sommet, les deux équations (XXXIX) et (XLI) devront être satisfaites en même temps.

Il viendra donc

$$\text{(XLVII)}\quad \frac{D}{E} = -\frac{\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A}}{\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C}}, \quad F = 0.$$

pour les deux relations demandées.

20. *Conditions pour que l'origine des coordonnées soit au foyer de la parabole.*

L'origine se trouvant sur l'axe, on a d'abord la relation

$$\frac{D}{E} = -\frac{\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A}}{\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C}};$$

mais l'origine appartient aussi à la perpendiculaire menée à l'axe par le foyer. On a donc aussi la rélation (XLIII), que l'égalité (XXXIX) réduite à

$$\text{(XLVIII)}\quad \pm 2\sqrt{F} = \frac{(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})\sin\theta}{A - B\cos\theta + C}.$$

la relation (XXXIX) pouvant s'écrire

$$\frac{D}{\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}}=\frac{-E}{\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}},$$

on en déduit

$$\frac{D}{\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}}=\frac{-E}{\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}}=\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{A-B\cos\theta+C}.$$

Les deux équations de condition, qui précédent, reviennient donc à

$$\text{(XLIX)}\quad \pm2\sqrt{F}=\frac{D\sin\theta}{\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}}=\frac{-E\sin\theta}{\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}},$$

d'ou l'on tire

$$\text{(L)}\quad\left\{\begin{aligned} D&=\pm\frac{2F}{\sin\theta}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}),\\ E&=\mp\frac{2F}{\sin\theta}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}),\end{aligned}\right.$$

et pour les axes rectangulaires,

$$D=\pm2F\sqrt{C},\qquad E=\mp2F\sqrt{A}.$$

21. *Conditions pour que l'origine des coordonnées soit au pied de la directrice de la parabole.*

Elles sont exprimées par les deux relations

$$\frac{D}{E}=-\frac{\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}},\qquad 4F=\frac{D^2+E^2-2DE\cos\theta}{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}},$$

qu'on peut écrire

$$\text{(LI)}\quad\frac{D}{\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}}=\frac{-E}{\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}}=\mp\frac{2\sqrt{F}}{\sin\theta}.$$

Lorsque les axes de coordonnées sont réctangulaires, ces relations deviennent

$$\text{(LII)}\quad\frac{D}{\sqrt{C}}=-\frac{E}{\sqrt{A}}=\mp2\sqrt{F},$$

d'où l'on tire

$$\text{(LIII)}\quad D^2-4CF=E^2-4AF=BD+2CE=BE+2AD=0.$$

22. *Condition pour que l'axe de la parabole soit paralléle à l'un des axes de coordonnées.*

L'axe de la parabole sera paralléle à l'axe des abscisses, si l'on à $\tang\omega=0$, qui donne $C=0$ et, parsuite $B=0$. On en conclu que

Pour que l'axe de la parabole soit paralléle à l' un des axes de coordonnées, il faut et il suffit que l'équation de la parabole ne renferme la variable relative à cet axe dans aucun des termes du second degré.

23. *Conditions pour que l'axe de la parabole se confonde avec l'un des axes des coordonnées.*

L'axe de la parabole se confondra avec l'axe des abscisses, s'il passe par l'origine et est paralléle à l'axe des x. On a ainsi les équations de conditions

$$C=0\,,\quad D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})=0\,,$$

dont la première reduit la seconde à $D=E\cos\theta$. On voit donc que :

L'axe de la parabole est l'un des axes de coordonnées, si la variable relative à cet axe manque dans les termes du second degré, et si le coëfficient du premièr degré de la deuxième variable est nul dans le cas de coordonnées rectangulaires et égal au coëfficient du premièr degré de la première variable multiplié par le cosinus de l'angle des axe dans le cas d'axes obliques.

Si l'axe de la parabole est paralléle à l' axe des abscisses, l'équation de la parabole se présentera toujours sous la forme

$$Ay^2+E(x+y\cos\theta)+F=0.$$

24. *Conditions pour que l'axe de la parabole se confonde avec l'un des axes de coordonnées, le sommet étant à l'origine.*

Elle sont nécessairement exprimées par les relations

$$C = 0, \quad D = E\cos\theta, \quad F = 0$$

dans le cas où cet axe des coordonnées est l'axe des x; l'équation de la courbe devient alors

$$Ay^2 + E(x + y\cos\theta) = 0.$$

25. *Conditions pour que l'axe de la parabole soit parallèle à la bisectrice de l'angle des axes.*

Dans ce cas on a $2\omega = \theta$, ce qui reduit l'égalité (II) à

$$A = C.$$

Ainsi, *pour que l'axe de la parabole soit parallèle à la bisectrice de l'angle des axes, il faut et il suffit que les carrés des variables soient affectés du même coéfficient.*

26. *Conditions pour que l'axe de la parabole se confonde avec la bisectrice de l'angle des axes.*

Si l'axe de la parabole se confond avec la bisectrice, l'expression (V) devra encore être nulle, ce qui fournit les relations

$$A = C, \quad D = -E$$

qui réduissent l'équation de la parabole à la forme

$$A(y + x)^2 + D(y - x) + F = 0.$$

27. *Conditions pour que l'axe de la parabole se confonde avec la bisectrice de l'angle des axes, le sommet étant à l'origine.*

Ces conditions sont nécessairement

$$A = C, \quad D = -E, \quad F = 0.$$

28. *Condition pour que l'axe de la parabole fasse avec l'un des axe de coordonnées un angle donné.*

Cette condition est fournie par l'égalité (II), qui donne

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = -\sqrt{\frac{C}{A}}.$$

Si l'axe passe en même temps par le sommet on aura encore

$$\frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang}(\theta - \alpha)} = - \frac{E\sqrt{A}}{D\sqrt{C}}.$$

29. *Condition pour que la tangente au sommet soit parallèle à l'un des axes de coordonnées.*

L'équation (XII) fait voir que la tangente est parallèle à l'axe des y, si l'on a

$$\sqrt{C} = \cos\theta\sqrt{A}$$

dans le cas de coordonnées obliques, et

$$C = 0$$

dans le cas des axes réctangulaires.

30. *Conditions pour que la tangente au sommet se confonde avec l'un des axes de coordonnées.*

Ces conditions pour l'axes des ordonnées sont evidemment exprimées par les deux équations

$$\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A} = 0,$$

$$\pm 2\sqrt{F} = \frac{D(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C}) + E(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C}) + \sqrt{C}(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})},$$

dont la première réduit la seconde à

$$\pm 2\sqrt{F} = \frac{D}{\sqrt{A}}, \quad \text{ce qui revient à} \quad D^2 - 4AF = 0$$

31. *Conditions pour que la tangente au sommet se confonde avec l'axe des ordonnées, le sommet étant à l'origine.*

Elles sont

$$\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A} = 0, \quad D = 0, \quad F = 0$$

de sorte que l'équation de la parabole peut s'écrire

$$A(y + x\cos\theta)^2 + Ex = 0.$$

TEOREMI INTORNO ALL' ATTRAZIONE DI ALCUNE SUPERFICIE, E SOLIDI OMOGENEI SOPRA UN PUNTO MATERIALE SITUATO SUL LORO ASSE.

MEMORIA

DEL DOTT. B. SANTINI.

INTRODUZIONE

Un punto materiale è attratto da un corpo qualunque in ragione diretta della sua massa e nell'inversa del quadrato della distanza. Questo teorema, dovuto al gran Newton (*), gli servì primamente di base nella celebre teorica della gravitazione universale, e quindi nel derivare alcuni teoremi relativi all'attrazione delle sfere omogenee sopra un punto materiale. Altri in seguito hanno in vari modi tolto a svolgere il medesimo argomento; ma niuno credo, si è occupato dell'attrazione relativa a segmenti sferici, al cono, al cilindro. Questo appunto intendo fare col presente lavoro. E poichè, per ciò che concerne la parte analitica, non è al tutto privo di simplicità e d'eleganza, stimai bene lo esporlo qual che ne sia l'utilità.

SUPERFICIE SFERICHE.

Rappresenti AF (fig. 1.) la superficie di un segmento sferico omogeneo a due basi parallele. Essendo *m* un punto materiale situato sul prolungamento del diametro BD alla distanza qualunque O*m* dal centro, ed essendo *af* l'elemento di AF, può ritenersi che tutte le molecole di esso elemento attraggano il punto *m* dalla medesima distanza, e da tutte le parti egualmente. Per conseguenza detta A l' attrazione relativa alla zona finita AF, avremo per la zona

(*) Phil: nat: princ. math. Lib. I. Prop. XI.

elementare *af*

$$dA = \frac{dm}{\overline{am}^2},$$

ove d*m* rappresenta la massa di *af*. Si dica R il raggio della superficie sferica, e δ la sua densità; avremo ancora

$$(1) \qquad dA = 2\pi R\delta \frac{dx}{y^2 + (x + k)^2},$$

dove *k* (essendo in D l'origine delle coordinate) rappresenta la quantità costante D*m*.

Per integrare questa formola abbiamo per equazione alla circonferenza :

$$y^2 = 2Rx - x^2;$$

e perciò

$$dA = 2\pi R\delta \, . \, \frac{dx}{2x(R + k) + k^2},$$

la quale integrata fra i limiti *x* e *k'* avremo

$$A = \frac{\pi R\delta}{R + k} \log \frac{2x(R + k) + k^2}{2k'(R + k) + k^2}.$$

Esteso quindi l'integrale fino ad

$$x = k' + m'n = k' + p$$

e detta *h* la distanza O*m*, risulta

$$(2) \qquad A = \frac{\pi R\delta}{h} \log \frac{2(k' + p) + k^2}{2k'h + k^2};$$

che é il valore finito dell' attrazione esercitata dalla zona AF sul punto materiale *m*.

Per le zone ad una sola base o callotte ABC, LDF la formola testè dedotta somministra rispettivamente

$$A = \frac{\pi R \delta}{h} \log \frac{(R + h)^2}{(R + h)^2 - 2ph},$$

$$A = \frac{\pi R \delta}{h} \log \frac{(R - h)^2 + 2ph}{(R - h)},$$

Si passa dunque dall'attrazione di una callotta all'attrazione della callotta stessa rovesciata, se la frazione affetta dal logaritmo si rovesci del pari, ed ivi si cangi il segno alla distanza del punto attratto dal centro della sfera.

Consideriamo ora il punto m all'origine delle coordinate. La formola (2) diviene

$$(3) \qquad A = \pi\delta \log \frac{p + k'}{k'}.$$

Di qui viene che: *una zona sferica a due basi attrae l'estremità del diametro come l'attrarrebbe un circolo massimo riunito nel centro e moltiplicato pel logaritmo iperbolico del rapporto tra la distanza che passa dal punto attratto alle due basi della zona.* E fatto

$$p + k' = 2R,$$

si ottiene per la callotta ABC

$$(4) \qquad A = \pi\delta \log \frac{2R}{2R - p},$$

ed acchiude un teorema analogo al precedente. Laonde

$$(5) \qquad A = \pi\delta \log 2$$

è l'attrazione relativa alla superficie dell' emisfero. Allo stesso modo per $k' = p$ l'equazione (3) risulta

$$A = \pi\delta \log 2.$$

Il perchè *un punto materiale situato all'estremità del diametro di una superficie sferica, è attratto dal segmento tanto alto quanto distante dal punto colla stessa energia con che lo attrae la superficie dell'emisfero.*

Un'altra specialità è pur compresa nella formola (3). Essa dà per la callotta LDF

$$A = \infty\ ;$$

risultato consentaneo al punto D, non all' intera callotta. Conciossiachè l'effetto infinito di A venga eliminato da un infinitesimo della superficie attraente. Il punto attratto è dunque sollecitato da LDF con forza finita. Per determinare questa forza vuolsi ricorrere al secondo teorema newtoniano ed alla nostra formola (4). Avremo pertanto

$$A = \pi\delta\left(4 - \log\frac{2R}{2R-p}\right).$$

Resta a dirsi del punto attratto situato in m'. A tal uopo è forza ripigliare la formola differenziale (1) che in questo caso diviene

$$dA = 2\pi R\delta\frac{dx}{y^2 + (x-k)^2},$$

e tuttavia importa un processo analogo d'integrazione. Eccone dunque senza più il risultato

$$(6) \qquad A = \frac{\pi R\delta}{h}\log\frac{R^2 + h(2p-h)}{R^2 - h^2}.$$

Attrazione dovuta alla zona AF sul punto m'. Chè se il centro della sfera è fuori di AF ed il punto attratto verso questo centro, ha luogo lo stesso fenomeno che nel rovesciamento di ABC (pag. 295). Si ha cioè

$$(7) \qquad A = \frac{\pi R\delta}{h}\log\frac{R^2 - h^2}{R^2 - h(2p+h)}.$$

Queste due ultime equazioni applicate alle callotte ABC, ADC danno per ambedue

$$A = \frac{\pi R\delta}{h}\log\frac{R+h}{R-h},$$

ciò che bene risponde al primo teorema newtoniano che come caso particolare si contiene nelle due anzidette equazioni.

Esso teorema è relativo all' equilibrio di un punto comunque posto nell'interno di una superficie sferica omogenea. Trattandosi invece di un suo segmento, a quale altezza sull'una o l'altra base troverà equilibrio il punto situato internamente sul diametro della sfera ? Cade in acconcio conchiudere il paragrafo con questa ricerca. Per maggior semplicità supponiamo che trattisi della zona HC. Le formole (6) e (7) ne somministrano

$$\frac{R^2 + h^2}{R^2 - h^2} = \frac{R^2 - h^2}{R^2 + h^2 - 2qh} \quad (*);$$

d'onde viene

$$h = \frac{R}{q}[R - \sqrt{(R^2 - q^2)}],$$

altezza richiesta alla quale il punto attratto si libra. Questa semplice formola ci avverte che per $q = R$, ossia quando AC divien l'emisfero HDI, l' equilibrio del punto attratto ha luogo in D. Inoltre esso il punto v'insiste con certa forza; ciò che avviene in qualunque zona ad una sola base, come si ricava *a priori* dallo stesso teorema newtoniano testè rammentato. Ma la forza d'insistenza rimarrebbe nella oscurità se non venisse all'uopo la nostra formola (4), dalla quale s' inferisce che *un punto materiale insta al fondo di una zona sferica ad una sola base con forza pari all'attrazione che subirebbe dalla zona complementaria.*

(*) Si noti che q rappresenta l' altezza nota della superficie attraente, e per ciò stesso $q = p + h$.

SOLIDI SFERICI.

A schivare le difficoltà di una lunga ed impacciata integrazione consideriamo il punto attratto in D. Prima di stabilire la formola differenziale analoga alla (1) è necessario conoscere l' attrazione che la minor base del solido elementare *af* esercita sul punto D. A tal' effetto consideriamo quella base come risultante da una infinità di circonferenze concentriche. Il perchè, se φ è l'attrazione dovuta all'intera base, ed a la distanza costante tra il centro di essa ed il punto attratto, avremo

$$d\varphi = 2\pi\delta \frac{y\,dy}{y^2 + a^2} .$$

espressione che integrata, somministra

$$\varphi = \pi\delta \log(y^2 + a^2) + C.$$

Da cui

$$C = - \pi\delta \log a^2 ;$$

e però

$$(8) \qquad \varphi = \pi\delta \log \frac{y^2 + a^2}{a^2} ,$$

che è il valore finito dell'attrazione con che la base minore dell'elemento solido *af* sollecita il punto D. Avremo dunque poi tutto l'elemento

$$(9) \qquad dA = \pi\delta \log \frac{y^2 + x^2}{x^2} dx :$$

che integrata fra i limiti

$$x = k' , \quad x = k' + p$$

risulta l'attrazione del segmento AF

$$A = \pi\delta \left[\log \frac{(2R)^p \, k'^{k'}}{(p + k')^{p+k'}} + p \right] .$$

Fra tutte le formole speciali che possono trarsi da questa generale quelle relative all'emisfero meritan solo alcuna considerazione. Esse ottengonsi con

$$p = R\ ,\ k' = 0\ ;\ p + k' = 2R\ ,\ k' = R\ ;$$

lo che importa

$$(10) \qquad A = \pi R \delta (1 + \log 2)\ ,\quad A = \pi R \delta (1 - \log 2).$$

Se ne inferisce

1.° che *gli estremi del diametro sono attratti dall'emisfero come l'attrarrebbono i suoi* $^3/_2$ *riuniti nel centro e moltiplicati per la somma o per la differenza tra l'unità e il logaritmo iperbolico di* 2,

2.° che *le attrazioni di due o più diversi emisferi esercitate come sopra stanno fra loro come i raggi.*

Se il punto attratto giace in O, si vede *a priori* essere

$$A = 2\pi R \delta.$$

Sicchè *l'emisfero tanto attrae il centro quanto la sfera l'estremità del diametro.* Ciò risulta, comparando la somma delle equazioni (10) con quest'ultima.

SUPERFICIE CONICHE.

Sia EG un tronco di superficie conica retta e D il punto attratto. Avremo per l'elemento *eg*

$$dA = 2\pi\delta \frac{y\,dx}{\overline{Dg}^2}\ .$$

Detto α l'angolo EDn, l'equazione superiore addiviene

$$dA = \pi\delta \operatorname{sen} 2\alpha \frac{dx}{x+k}\ .$$

Ed integrando

$$A = \pi\delta \operatorname{sen} 2\alpha \log(x + k) + C.$$

Per $x = 0$

$$C = \pi\delta \text{ sen } 2\alpha \log k\,,$$

e per $x = p$

$$A = \pi\delta \text{ sen } 2\alpha \log \frac{p+k}{k}\,,$$

attrazione richiesta di EG sopra D.

Dal confronto della formola ora desunta colla (3) emerge

$$A : A' :: 1 : \text{sen } 2\alpha.$$

Quando $\alpha + 45°$, come nella fig., le due attrazioni non pure si eguagliano, ma quella relativa ad EG giunge al *maximum* della sua energia. Allora dalla equazione superiore si deduce che *la superficie di un tronco di cono a lati eguali rettangoli attrae la sommità come l'attrarrebbe qualunque circolo concentrato alla distanza di un raggio dal punto attratto e moltiplicato pel logaritmo iperbolico del quoziente tra l'altezza del cono e quella complementaria del tronco.* Inoltre, appellando a ciò che è stato detto a pag. (295, e 298) (equazioni (5) e (8)) essendo $m'n = Dm'$, le quattro diverse superficie EG, AF, HI, HBI attraggono egualmente il punto D.

SOLIDI CONICI.

La formola (8) adattata al caso nostro diviene

$$\varphi = 2\pi\delta \log. \text{ sec. } \alpha.$$

E poichè può sempre prendersi l'altezza $Dn = 1$, avremo (fatto il lato $ED = l$) più acconciamente

$$\varphi = 2\pi\delta \log l.$$

Dunque *tutti i circoli compresi in un cono retto attraggono egualmente un punto materiale posto al vertice* (*). Laonde

(*) Questa verità poteva anco derivarsi *a priori*, avuto riguardo alla natura particolare delle coordinate coll'origine al vertice del cono.

e cono e tronco attraggono quel punto colle forze rispettive

$$A = 2\pi\delta p \log l, \quad A' = 2\pi\delta p' \log l.$$

Ondechè *l'attrazione dell'un solido e l'altro sopra il vertice del 1.° agguaglia la massa di una circonferenza avente per raggio l' altezza del 1.° o del 2.° moltiplicata pel logaritmo iperbolico dell'apotema.* Di più fra il cono, il tronco ed un loro circolo qualunque si vede a colpo d'occhio esistere i rapporti

$$\varphi : A : A' :: 1 : p : p'.$$

SUPERFICIE CILINDRICA.

Rispetto alla superficie in discorso la formola (1) si cangia in

$$dA = 2\pi R\delta \frac{dx}{R^2 + x^2}.$$

Per integrare questa equazione poniamo $R = 1$, ciò che può sempre farsi; allora

$$A = 2\pi\delta(\text{arc. tang.} = x) + C'.$$

Con $x = k$

$$C = -2\pi\delta(\text{arc. tang} = k).$$

Onde, esteso l'integrale fino ad $x = p + k$, ottiensi per la superficie cilindrica

$$A = 2\pi\delta(\text{arc. tang} = p + k - \text{arc. tang} = k).$$

Se il punto attratto giace al centro della base

$$A = 2\pi\delta(\text{arc. tang} = p).$$

Vale a dire che *l'attrazione di una superficie cilindrica sopra il centro della base viene espressa dalla sua massa moltiplicata per l'arco la cui tangente è l'altezza del cilindro.*

CILINDRO SOLIDO.

Abbiamo dalla equazione (9)

$$dA = \pi\delta \log \frac{R^2 + x^2}{x^2} \, dx \, .$$

ove supporremo $R = 1$, e quindi integreremo fra i limiti

$$x = k \, , \quad x = k + p \, ,$$

e rappresentando per $-P$ le quantità affette dal segno meno, avremo per la richiesta attrazione del cilindro

$$A = \pi\delta \left[(p + k) \log \frac{1 + (p + k)^2}{(p + k)^2} - P + 2 \text{arc. tang} = p + k \right].$$

Pel punto attratto giacente al centro della base scompaiono k e $-P$, e per $p = 1$ scompaiono eziandio i segni logaritmico e trigonometrico; cioè si ha prossimamente

$$A = \frac{9}{4} \pi\delta \quad (*) \, .$$

Laonde *un cilindro d'altezza pari al raggio attrae il centro della base come l'attrarrebbono i* $\frac{27}{16}$ *della sfera che avesse lo stesso diametro del cilindro e si riunisse nel centro della base opposta al punto attratto.*

Questa poche tracce sono appena l'abbozzo di una teoria che sembrami poter costituire una importante parte della meccanica razionale. Di qui l'opportunità che i matematici procacciassero di darle miglior sesto, o maggior ampiezza a somiglianza di quanto, non ha molto, è stato fatto rispetto a'centri di gravità per opera segnatamente del chiarissimo prof. Barsotti.

(*) È da notarsi che log. $2 + 90° = 2,2630465$, il perchè le quantità trascendenti si riducono alla frazione $\frac{9}{4}$ colla differenza dal vero di circa $\frac{1}{72}$.

SUL PRINCIPIO DI RECIPROCITA' NELLA TEORIA DELLE FORME.

NOTA

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.

1.° Eulero, nelle sue ricerche sulla partizione dei numeri, ha dimostrato, che il numero dei modi in cui un numero s può essere formato da una somma di r termini della serie 0, 1, 2, ... n; (supponendo che ciascun elemento possa essere ripetuto un indefinito numero di volte); è eguale al coefficiente di $x^s z^r$ nello sviluppo della espressione :

$$(1) \qquad Z = \frac{1}{(1-z)(1-xz)\ \dots\ (1-x^n z)}\ .$$

Supponiamo :

$$Z = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots ,$$

cambiando la z in xz si ha :

$$(1-z)Z = (1 - x^{n+1}z)(1 + A_1 xz + A_2 x^2 z^2 + \dots)$$

per la quale :

$$A_r(1 - x^r) = A_{r-1}(1 - x^{r+n})$$

e quindi :

$$(2) \qquad A_r = \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\ \dots\ (1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\ \dots\ (1-x^r)} = \psi(x).$$

Suppongasi :

$$\psi(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots .$$

si avrà :

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots\dots}{1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots},$$

ed indicando con $f(x)$, $\varphi(x)$ il numeratore ed il denomi-

natore di $\psi(x)$ si avrà anche :

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Siano α_1 , α_2 .... le radici dell'equazione $f(x) = 0$, e β_1 , β_2 . . . quelle della $\varphi(x) = 0$; pongasi :

$$s_m = \frac{1}{\beta_1{}^m} + \frac{1}{\beta_2{}^m} + \ldots - \frac{1}{\alpha^m{}_1} - \frac{1}{\alpha^m{}_2} - \ldots$$

si otterrà :

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + \ldots,$$

il quale valore posto a confronto col superiore dà luogo alle

$$C_1 = s_1$$
$$2C_2 = C_1 s_1 + s_2$$
$$3C_3 = C_2 s_1 + C_1 s_2 + s_3, \text{ ec.}$$

dalle quali si dedurrà :

$$C_i = \frac{1}{\Gamma(i+1)} \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ s_{i-1} & s_{i-2} & s_{i-3} & \ldots\ldots & -(i-1) \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \ldots\ldots & s_1 \end{vmatrix}$$

Rappresenti $E\left(\frac{h}{k}\right)$ una quantità che è nulla se h non è divisibile esattamente per k, ed è eguale a k nel caso contrario; rammentando le note proprietà delle radici delle equazioni binomie si troverà facilmente che :

$$s_m = 1 + E\left(\frac{m}{2}\right) + E\left(\frac{m}{3}\right) + \ldots + E\left(\frac{m}{r}\right) - E\left(\frac{m}{n+1}\right)$$
$$- E\left(\frac{m}{n+2}\right) - \ldots - E\left(\frac{m}{n+r}\right) ;$$

per mezzo della quale si otterranno ad un tratto i valori numerici delle s_1, s_2 . . . .

Si osservi che il valore (2) di $\psi(x)$ si può anche porre sotto la forma:

$$\psi(x) = \frac{(1 - x^{r+1})(1 - x^{r+2}) \ldots . (1 - x^{r+n})}{(1 - x)(1 - x^2) \ldots . (1 - x^n)},$$

e siccome evidentemente questa espressione sarebbe il coefficiente di z^n nello sviluppo della:

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - xz) \ldots \ldots (1 - x^r z)}$$

siamo condotti al seguente:

Teorema 1.° Il numero dei modi in cui un numero s può essere formato da una somma di r termini della serie 0, 1, 2, ... n è eguale al numero dei modi che il medesimo numero può essere formato dalla somma di n termini della serie 0, 1, 2 ... r.

2.° Vogliasi ora mediante gli elementi a_0, a_1, ... a_n formare una funzione omogenea del grado r ed omogenea in indice dell'ordine s. Il numero dei termini di quella funzione sarà eguale al numero dei modi nei quali il numero s può essere formato da una somma di r elementi, ripetuti o no, della serie 0, 1, 2 ... n; e quindi pel teorema superiore ne risulta il:

Teorema 2.° Una forma di grado r ed omogenea in indice dell' ordine s composta cogli elementi a_0, a_1, ... a_n consta di un numero di termini eguale a quello dei termini di una forma di grado n; omogenea in indice dell' ordine s e composta cogli elementi a_0, a_1 . . . a_r.

La proprietà contenuta in questo teorema é quella che denominiamo *principio di reciprocità delle forme.* Per esempio considerando l'equazione del quarto grado:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

ed indicando con x_1, x_2, x_3, x_4 le radici; è noto che la funzione simmetrica $\Sigma x^3_1 x^2_2 x_3$ sarà del terzo grado ed omogenea in indice del sesto ordine; si avrà quindi:

$$s_m = 1 + E\left(\frac{m}{2}\right) + E\left(\frac{m}{3}\right) - E\left(\frac{m}{5}\right) - E\left(\frac{m}{6}\right) - E\left(\frac{m}{7}\right)$$

per cui:

$$s_1 = 1\ ,\ s_2 = 3\ ,\ s_3 = 4\ ,\ s_4 = 3,\ s_5 = -4,\ s_6 = 0$$

e:

$$C_6 = 5$$

cioè il numero dei termini della funzione dei coefficienti equivalente a quella funzione simmetrica sarà cinque. Quindi pel principio di reciprocità sarà pure cinque il numero dei termini della funzione dei coefficienti equivalente alla funzione simmetrica $\Sigma x^4_1 x^2_2$ formata colle radici x_1, x_2, x_3 della equazione del terzo grado:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

3.° Supponiamo che la forma di grado r ed omogenea in indice dell'ordine s debba soddisfare all'equazione:

$$(3) \qquad a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \ldots + na_{n-1} \frac{d}{da_n} = 0\,.$$

Questa servirà a determinare un certo numero di coefficienti numerici della forma medesima; il qual numero sarà evidentemente eguale al numero dei termini che si ottengono operando, sulla forma che si considera, col primo membro dell'equazione superiore. Ma la funzione risultante da questa operazione sarà omogenea di grado r, omogenea in indice dell'ordine $s-1$, per cui il numero dei termini della medesima sarà C_{s-1}, ed il numero dei coefficienti che rimangono indeterminati nella formola che si considera sarà:

$$H_s = C_s - C_{s-1}.$$

Se a quei coefficienti indeterminati si danno dei valori arbitrarj si potranno ottenere moltissime forme differenti fra loro; ma evidentemente di queste non saranno indipendenti che un numero H, essendo le altre legate ad esse per mezzo di equazioni lineari a coefficienti numerici. Questa importante osservazione è dovuta al Sig. Cayley.

Il valore di H_s si può ottenere senza calcolare a parte i valori di C_s e C_{s-1}; osservando che C_{s-1} è il coefficiente di $x^{s-1}z^r$ nello sviluppo della (1), oppure il coefficiente di $x^s z^r$ nello sviluppo della espressione:

$$\frac{x}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^n z)}$$

e quindi sarà H_s il coefficiente di $x^s z^r$ nello sviluppo di:

$$\frac{1-x}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^n z)}.$$

Per cui ponendo:

$$(4)\quad p_m = \mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{3}\right) + \dots + \mathrm{E}\left(\frac{m}{r}\right) - \left(\frac{m}{n+1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m}{n+2}\right) - \dots - \mathrm{E}\left(\frac{m}{n+r}\right)$$

si avrà:

$$H_s = C_s - C_{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \begin{vmatrix} p_1 - 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 - 2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s-1} & p_{s-2} & p_{s-3} & \dots & -(s-1) \\ p_s & p_{s-1} & p_{s-2} & \dots & p_1 \end{vmatrix}$$

Si consideri ora una forma di grado n ed omogenea in indice dell'ordine s la quale soddisfi all'equazione:

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots + ra_{r-1} \frac{d}{da_r} = 0.$$

Pel principio di reciprocità sarà C_{s-1} il numero dei termini della funzione risultante dall'operare col simbolo superiore sulla forma che si considera; e quindi sarà H_s il numero delle forme di questa specie indipendenti fra loro.

4.° Le forme conosciute che soddisfano all'equazione superiore sono gli invarianti, i coefficienti della equazione ai quadrati delle differenze delle radici di una equazione qualsivoglia, ed il primo coefficiente di un covariante qualunqne. Per un invariante di grado r di una forma dell'ennesimo grado si ha : $s = \frac{nr}{2}$, per cui il valore di s non cambia permutando le r, n. Pel principio di reciprocità si avrà quindi che ad ogni invariante di grado r della forma dell'ennesimo grado corrisponde un invariante di grado n della forma dell' erresimo grado.

Pel primo termine di un covariante di grado r rispetto ai coefficienti, e di grado m rispetto alle variabili della forma dell'ennesimo grado si ha $s = \frac{1}{2}(nr - m)$, il quale valore non muta permutando le r, n. Ora un covariante é determinato allorquando se ne conosca il primo termine ed il grado rispetto alle variabili; quindi pel principio di reciprocità ad ogni covariante, della forma dell'ennesimo grado, di grado r rispetto ai coefficienti, e di grado m rispetto alle variabili corrisponde un covariante della forma dell'erresimo grado, di grado n rispetto ai coefficienti e del grado m rispetto alle variabili. Questa proprietà degli invarianti e dei covarianti costituisce la *legge di reciprocità* scoperta dai Sigg. Sylvester ed Hermite; essa è manifestamente una conseguenza del principio di reciprocità.

5.° Consideriamo una funzione qualsivoglia, di grado r e di indice s, dei coefficienti a_0, a_1 . . . a_n della forma $f(x, y)$, e suppongasi di avere espressa la funzione medesima per le radici della $f(x, 1) = 0$; domandasi quale sarà il massimo numero di funzioni simmetriche delle radici che entreranno

comporre quella funzione. A ciò rammentiamo 1.° che il grado di ciascuna funzione simmetrica sarà eguale ad s, 2.° che in ciascuna funzione simmetrica le radici non dovranno essere affette da esponente maggiore di r. É quindi evidente che la quistione superiore equivale al ricercare in quanti modi il numero s può essere formato dalla somma di n elementi, uguali o disuguali, della serie 0, 1, 2, .., r. Sarà quindi questo numero eguale a C_s cioè al numero dei termini della funzione che si considera. Supponiamo che questa funzione sia fra quelle che soddisfano la equazione (3); espressa mediante le radici x_1, x_2 ... x_n della $f(x,1)=0$ dovrà soddisfare la:

$$\frac{d}{dx_1}+\frac{d}{dx_2}+\ldots+\frac{d}{dx_n}=0,$$

la quale varrà a determinare un numero C_{s-1} di coefficienti numerici, per cui ne rimarranno H_s indeterminati. Dunque allorquando si suppone essere il massimo il numero delle funzioni simmetriche che entrano a formare quella funzione si ottengono H_s funzioni delle radici indipendenti fra loro; ma d'altra parte sappiamo che questo appunto deve essere il numero delle forme indipendenti di grado r e di indice s per una forma binaria dell'ennesimo grado; quindi si avrà il seguente:

Teorema 3.° Se una forma dei coefficienti della $f(x, y)$ la quale soddisfi all' equazione (3) si esprime in funzione delle radici della $f(x, 1)=0$, il numero delle funzioni simmetriche che entrano a comporla é eguale al numero dei termini della forma medesima.

Pongasi ora:

$$(5)\quad \begin{cases} a^r_0 . \text{ Norma } (X_0+x_1X_1+x^2_1X_2+\ldots+x^r_1X_r) \\ \qquad =(a_0X_0+a_1X_1+\ldots+a_rX_r)^n; \end{cases}$$

è evidente che alla funzione simmetrica del primo membro

$\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots$ corrisponde nel secondo membro il monomio

$a_{s_1}^{r_1} a_{s_2}^{r_2} \ldots$; di cui l'indice è eguale al grado della funzione simmetrica; ed é dell'ennesimo grado. Ciò posto consideriamo un invariante di grado r e di indice s della forma dell'ennesimo grado $f(x,y)$; supponiamo che il medesimo venga espresso in funzione delle radici della $f(x, 1)=0$, ed in luogo delle varie funzioni simmetriche che lo compongono si sostituiscano le espressioni corrispondenti date dal secondo membro della (5); si otterrà una nuova funzione dei coefficienti a_0, a_1, a_2, ... a_r; di grado n, di indice s, e composta di un numero di termini eguale a quello dell'invariante che si considera. Questa nuova funzione sarà per la legge di reciprocità un invariante di grado n e di indice s della forma binaria dell'erresimo grado. Una analoga proprietà vale pei covarianti. Per esempio, sia Δ il discriminante della forma del terzo grado:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)(x, y)^3$$

e φ il suo coefficiente quadratico. Il coefficiente del primo termine del covariante $\Delta.\varphi$ è:

$$\Delta.(a_0 a_2 - a_1^2)$$

la quale forma espessa in funzione delle radici x_1, x_2, x_3 dà:

$$\begin{aligned} 243\Delta.(a_0 a_2 - a_1^2) = a_0^6 [& 2\Sigma x_1^6 x_2 x_3 + 3\Sigma x_1^5 x_2^3 \\ & + 6\Sigma x_1^4 x_2^2 x_3^2 - 4\Sigma x_1^3 x_2^3 x_3^2 + \Sigma x_1^4 x_2^3 x_3 \\ & - 3\Sigma x_1^5 x_2^2 x_3 - 4\Sigma x_1^4 x_2^4 - \Sigma x_1^6 x_2^2]. \end{aligned}$$

Si formi ora la espressione:

$$\begin{aligned} & a_0^6 \text{ Norma } (X_0 + x_1 X_1 + \ldots + x_1^6 X_6) \\ & = (a_0 X_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_6 X_6)^3 \end{aligned}$$

e dal confronto dei coefficienti delle medesime potenze delle X_0, X_1 ... nei due membri di questa equazione si hanno le:

$$a^6_0 \Sigma x^6_1 x_2 x_3 = 3a^2_1 a_6 , \quad a_0^6 \Sigma x^5_1 x^3_2 = 6a_0 a_3 a_5 \text{ ec.}$$

per cui sostituendo si otterrà:

$$12(a^2_1 a_6 + 3a_0 a_3 a_5 + 3a^2_2 a_4 - 2a_2 a^2_3 + a_1 a_3 a_4 \\ - 3a_1 a_2 a_5 - 2a_0 a^2_4 - a_0 a_2 a_6)$$

la quale espressione è il coefficiente del primo termine del covariante quadratico della forma di sesto grado come abbiamo trovato in altra occasione. Il metodo suesposto di applicare la legge di reciprocità è dovuto al Sig. Hermite (*The Cambridge Journal* n.° 35).

6.° I coefficienti dell' equazione ai quadrati delle differenze delle radici di una equazione qualsivoglia soddisfacendo all'equazione (3) saranno composti di forme che vi soddisfano, le quali saranno o invarianti, o coefficienti di primi termini di covarianti. Il numero H_s rappresentando il numero dei coefficienti numerici che rimangono indeterminati sarà il numero di quelle forme che entrano a comporre il coefficiente di un determinato termine. Ora abbiamo dimostrato nella nota « Sul discriminante delle funzioni omogenee ec. » che il valore di s pel coefficiente dell' $(i+1)$esimo termine è $2i$; e che il valore di r è 2, 4, 6 . . . $2(n-1)$ pei coefficienti dei termini secondo, terzo ... ennesimo, ed è $2(n-1)$ per tutti gli altri. Ne risulta che per i non $> n-1$ il numero di quelle forme sarà eguale ad H_{2i} purchè nell'espressione (4) facciasi $r=2i$ e per $i \geqq n-1$ il numero di quelle forme sarà H_{2i} posto $r=2(n-1)$ nell'espressione (4). Notisi che per $2i<n$ dovrebbesi nella formola (4) porre $2i$ in luogo di n, ma siccome in questo caso i termini negativi della formola

stessa non influiscono sul valore di H_{2i} si potrà far uso di essa senza variazione.

I coefficienti della risolvente di Lagrange per una equazione di grado n, numero primo, sono pure omogenei, omogenei in indice e soddisfano all'equazione (3). Il coefficiente del termine $(i+1)$esimo essendo del grado ni, omogeneo in indice dell'ordine ni, il numero delle forme che comporranno il coefficiente medesimo sarà H_{ni} ponendo nella (4) $r = ni$, per cui si potrà assumere :

$$p_m = \mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{3}\right) + \ldots + \mathrm{E}\left(\frac{m}{n}\right).$$

Queste forme saranno tutte coefficienti di primi termini di covarianti della forma di grado n; cioè saranno i coefficienti dei primi termini dei covarianti di grado ni rispetto ai coefficienti è di grado $ni(n-2)$ rispetto alle variabili della forma medesima.

Settembre 1856.



SOPRA I RESTI DI STURM.

NOTA

DEL SIG. CAV. F. FAA' DI BRUNO

Siano le funzioni:

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$
$$Q = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-1},$$

ed applichiamo alle medesime il processo del massimo comun divisore, seguendo le norme indicate dal Sig. Sturm circa ai segni dei resti. Notiamo con u_μ il resto di grado $n - \mu$, e poniamo

$$\frac{Q}{P} = s_0 x^{-1} + s_1 x^{-2} + s_2 x^{-3} + \dots + s_p x^{-p-1} + \dots$$

Si avrà per u_μ dietro il metodo, così appellato dal Sig. Cauchy, delle *chiavi algebriche*, l'espressione

$$u_\mu = a_0^{n-1} \left(\frac{s_{\mu-2} \cdot s_{\mu-4} \dots}{s_{\mu-1} \cdot s_{\mu-3} \dots} \right)^2 \sum_{l=0}^{l=n-\mu} x^l \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{\mu-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\mu-2} & s_{\mu-1} & s_\mu & \dots & s_{2\mu-3} \\ S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{\mu-1} \end{vmatrix}$$

ove

$$S_i = a_{n-\mu-l}\, s_{\mu+i-1} + a_{n-\mu-l-1}\, s_{\mu+i} + \dots + a_0\, s_{n-l+i-1}$$

I valori poi di s_0, s_1, s_2 ... saranno dati, come ho già annunziato in una Nota precedente, dalla formola:

$$s_p = (-1)^p \frac{1}{a_0^{p+1}} \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ b_3 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p-1} & a_{p-1} & a_{p-2} & a_{p-3} & \dots & a_0 \\ b_p & a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

La espressione di u_μ, salvo qualche modificazione, fu trovata dal Sig. Cauchy, ed è ben più semplice ed esplicita di quella data dal Sig. Brioschi in questi Annali, in cui la variabile si trova ancora amalgamata coi coefficienti. Ma l'illustre Geometra non avea dato i valori di s.

Osservisì ora che dessa può ancora semplificarsi. In fatti S_i può considerarsi come parte del coefficiente di $x^{-(n-l-i)}$ nel prodotto di

$$\frac{P}{x^n} = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \dots$$

per la serie

$$s_0 x^{-1} + s_1 x^{-2} + s_2 x^{-3} + \dots,$$

prodotto che non è altro se non

$$b_0 x^{-1} + b_1 x^{-2} + b_2 x^{-3} + \dots + b_{n-l+i-1} x^{-(n-l+i)} + \dots + b_{n-1} x^{-n}.$$

Da ciò si ricava che

$$S_i = b_{n-l+i-1} - \left(a_{n-\mu-l+1} s_{\mu+i-2} + \dots + a_n s_{i-l-1}\right)$$

Allora per un principio noto della teoria dei determinanti, quello che figura nell'espressione di u_μ, può ridursi a tale che S_0, S_1, $S_2 \dots$ abbiano i nuovi valori seguenti:

$$S_0 = b_{n-l-1}$$

$$S_1 = b_{n-l} - a_{n-l}\, s_0$$

$$S_2 = b_{n-l+1} - a_{n-l}\, s_1 - a_{n-l+1}\, s_0$$

. . . .

$$S_i = b_{n-l+i-1} - a_{n-l}\, s_{i-1} - a_{n-l+1}\, s_{i-2} - \ldots - a_n\, s_{i-l-1}$$

. . . .

$$S_{\mu-1} = b_{n-l+\mu-2} - a_{n-l}\, s_{\mu-2} - a_{n-l+1}\, s_{\mu-3} - \ldots - a_n\, s_{\mu-2-l}\,.$$

In questo modo basterà calcolare s_p per valori di p compresi fra 0 e $\mu-2$, mentre prima si sarebbero dovuti calcolare fino a $2\mu-1$.

Seguendo ancora il metodo delle chiavi algebriche, si può esprimere il resto u_μ in funzione delle radici, ciò che il Sig. Cauchy non ha fatto. Fo osservare a questo fine, che chiamando P' la derivata di P e $\left(\frac{Q}{P'}\right)_i$ ciò che diventa $\frac{Q}{P'}$, fattovi $x = x_i$, x_i essendo una delle radici dell'equazione $P = 0$, si ha

$$s_p = \sum \left(\frac{Q}{P'}\right)_i x_i^p\,.$$

Allora ricorrendo alle chiavi anastrofiche, trovo meno un fattore positivo che scarto,



$$-u_\mu=\left(\frac{Q}{P'}\right)_1\left(\frac{Q}{P'}\right)_2\cdots\left(\frac{Q}{P'}\right)_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{\mu-2} & x_2^{\mu-2} & \dots & x_n^{\mu-2} \\ x_1^{\mu-1} & x_2^{\mu-1} & \dots & x_n^{\mu-1} \end{vmatrix}$$

$$\times \sum x^l \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots\dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots\dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{\mu-2} & x_2^{\mu-2} & \dots\dots & x_n^{\mu-2} \\ x_1^{\mu-1}\,\mathrm{D}_{x_1} & x_2^{\mu-1}\,\mathrm{D}_{x_2} & \dots & x_n^{\mu-1}\,\mathrm{D}_{x_n} \end{vmatrix} a_{n-\mu-l+1}$$

ove i simboli derivativi D_{x_1}, D_{x_2}, ec. si riferiscono al coefficiente $a_{n-\mu-l+1}$ considerato come funzione delle radici.

Quando $l=n-\mu$, si vede che $\mathrm{D}_{x_h}\, a_1 = -a_0\, x_h$; allora sorge fuori il quadrato di un determinante, ed il coefficiente della più alta potenza da u_μ sarà proporzionale a:

$$\left(\frac{Q}{P'}\right)_1\left(\frac{Q}{P'}\right)_2\cdots\left(\frac{Q}{P'}\right)_n \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_1 & \dots & s_{\mu-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\mu-2} & s_{\mu-1} & \dots & \dots & s_{2\mu-3} \\ s_{\mu-1} & s_\mu & \dots & \dots & s_{2\mu-2} \end{vmatrix}$$

Se di più $Q=P'$, i coefficienti delle più alte potenze sa-

ranno proporzionali ai diversi determinanti situati lunghesso la diagonale (s_0 — $s_{2\mu-2}$) , ed il numero delle variazioni di segno che dessi offriranno uguaglierà quello delle coppie delle radici immaginarie che soddisfanno all'equazione proposta $P = 0$, cosa del resto ben nota.

Mi giovo di quest'occasione per tributare, come ne fui avvertito, al Sig. Bezout, il merito d'aver pel primo trovato le risultanti dell'eliminazione sotto forma di determinanti, che io dava nella Nota (Nov. 1855). Ciò io perfettamente ignorava, altrimenti non mi sarei gettato in inutili ricerche.

MOTO DEL DOPPIO CONO LUNGO DUE DIRETTRICI RETTILINEE POSTE IN PIANI VERTICALI TRA LORO CONVERGENTI.

NOTA

DEL SIG. PROF. MATTIA AZZARELLI

1. Siano AB, A'B' (fig. 1.ª) le proiezioni orizzontali di due piani verticali tra loro convergenti sotto un angolo 2φ. Per maggior semplicità supporremo in principio che le due direttrici siano della medesima altezza *a* al disopra dell'orizzonte, e quindi esamineremo il caso in cui abbiamo una inclinazione θ.

2. Se sopra le due direttrici così disposte venga collocato un doppio cono omogeneo in modo che la sua base VT si trovi nel piano bisecante l'angolo diedro 2φ fatto dai piani verticali, avverrà il moto del cono dalla parte ove i piani sono divergenti, e questo moto non cesserà altrimenti se non quando i vertici del cono siano sopra le due direttrici.

Poniamo che abbia avuto luogo il moto per un tempo *t*, ed il cono sia pervenuto in una determinata posizione. Se consideriamo il piano verticale AB è facile concepire che desso nel continuo moto del cono tende a tagliar questo

secondo sezioni, le quali sono sempre tra loro parallele, e che queste sezioni sono ellisse le quali hanno i centri su di una retta, che partendo dal vertice S va al punto medio di un altra retta che passa per V , ed è parallela al piano AB, onde risulta , che questi centri sono tutti allocati nell'angolo VSG. Se ora immaginiamo condotto per l'asse del cono un piano orizzontale , le ellissi risultanti dalle sezioni dei piani verticali si trovano metà al disopra e metà al disotto di questo piano orizzontale, ed hanno per assi maggiori MN, M'N'. E poichè in ciascuna di tali semi-ellissi il punto di massima distanza dall'asse maggiore è quello di loro tangenza colla rispettiva direttrice , cioè quel punto che corrisponde al semi-asse minore; così se si congiungono i punti di tangenza di esse ellissi, come *mm'*, si ottiene una retta la quale è tra l'asse SS' del cono , e l'origine delle coordinate, onde l'asse del cono e l'asse delle successive rotazioni sono in due distinti piani verticali e paralleli.

Ora il peso della massa del doppio cono è costantemente applicato nel suo centro C di gravità, e la verticale condotta per questo punto dista di tutto C*p* dalla retta che unisce i punti del contatto : dunque se intendasi a questo peso sostituito lo stesso peso applicato in *p* , ed una coppia di braccio di leva C*p* e di forza eguale al peso, si comprende che il doppio cono esercita sopra le due direttrici una pressione, e che nello stesso tempo ha luogo la rotazione prodotta dalla coppia col momento

$$Cp \times P ,$$

designando P il peso del doppio cono : però il braccio di leva diminuendo col pregredire il cono nel suo moto, ossia coll'avvicinarsi le ellissi parallele al vertice del cono; l'effetto della forza, e quindi esso moto di rotazione cesserà lorquando l'indicato braccio di leva è zero.

3. Veduto come e perchè debba avvenire il moto del cono, poniamo che M, N siano le projezioni orizzontali dei vertici di una delle indicate ellissi, e che m sia quella del suo centro.

Si ponga

$$\mathrm{OP} = x\ , \quad \mathrm{PM} = y.$$

ed ancora

OA $= m$

VS $= l$ lato del cono

CS $= h$ altezza del cono

VST $= 2\alpha$ angolo al vertice del cono

SNM $= \beta$

BO′B′ $= 2\varphi$ angolo diedro formato dai due piani verticali

VC $= r$ raggio della base del cono:

avremo

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MS}} = \frac{\mathrm{sen}\ 2\alpha}{\mathrm{sen}\ \beta}$$

ma

$$\frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{S}r} = \frac{\mathrm{VS}}{\mathrm{CS}}\ ,$$

dunque

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{S}r} = \frac{\mathrm{VS.sen}\ 2\alpha}{\mathrm{CS.sen}\ \beta}$$

e quindi

$$\mathrm{MN} = \frac{\mathrm{S}r.\mathrm{VS.sen}2\alpha}{\mathrm{CS.sen}\ \beta} = \frac{l(h-y)\mathrm{sen}2\alpha}{h\ \mathrm{sen}\ \beta}\ .$$

Ora essendo

$$\mathrm{P}p = \mathrm{M}m\ \cos\varphi = \frac{\mathrm{MN}}{2}\cos\varphi = \frac{l(h-y)\mathrm{sen}2\alpha\cos\varphi}{2h\ \mathrm{sen}\beta}$$

potremo avere l' ascissa dell' asse istantaneo di rotazione, cioè

$$Op = x + \frac{l(h-y)\text{sen}2\alpha\cos\varphi}{2h\,\text{sen}\beta}.$$

Poichè fra gli angoli α, β, φ esiste la relazione

$$\beta = 90^\circ + \varphi - \alpha\,,$$

le due trovate espressioni diverranno ancora, essendo

$$l\,\text{sen}\,\alpha = r\,,$$

$$(1)\qquad Pp = \frac{r(h-y)\cos\alpha\cos\varphi}{h\cos(\varphi-\alpha)}$$

$$(2)\qquad Op = x + \frac{r(h-y)\cos\alpha\cos\varphi}{h\cos(\varphi-\alpha)}.$$

4. Se si volesse ora che il doppio cono stesse al principio del moto, cioè che l' asse di rotazione si confondesse con AA′ dovremo porre la condizione

$$x + \frac{r(h-y)\cos\alpha\cos\varphi}{h\cos(\varphi-\alpha)} = 0\,.$$

Poichè abbiamo

$$y = x\,\text{tang}\,\varphi + m$$

possiamo ricavare da queste due equazioni le coordinate corrispondenti al principio del moto.

Eliminando la y deduciamo

$$x = -\frac{r(h-m)\cos\alpha\cos\varphi}{h\cos(\varphi-\alpha) - r\cos\alpha\,\text{sen}\,\varphi}$$

ovvero

$$x = -\frac{r(h-m)\cos\alpha}{h\cos\alpha + (h\,\text{sen}\,\alpha - r\cos\alpha)\text{tang}\,\varphi}\,;$$

e perchè nel cono

$$r = h\,\text{tang}\,\alpha\,;$$

avremo in fine

$$(3)\qquad x = -\frac{r(h-m)}{h}$$

e quindi

$$(4) \qquad y = \frac{m(h + r \operatorname{tang} \varphi) - rh \operatorname{tang} \varphi}{h} \, .$$

5. Essendo

$$\frac{Mr}{Sr} = \frac{VC}{CS}$$

sarà

$$Mr = PC = \frac{Sr.VC}{CS} = \frac{r(h-y)}{h} ,$$

e quindi

$$(5) \qquad Cp = CP - Pp = \frac{r(h-y) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi}{h \cos(\varphi - \alpha)}$$

che è la lunghezza variabile del braccio di leva.

Da questa espressione (5) risulta che al crescere della y il braccio di leva diminuisce così da annullarsi per $y=h$, cioè la forza che produce il moto passa per l'asse di rotazione quando i vertici del doppio cono insistono su i piani verticali : dalla medesima espressione si rileva ancora, che se i piani da convergenti passano ad essere paralleli il moto cessa perchè $\varphi = 0$. Quindi ovunque si ponga il doppio cono rimarrà sempre in equilibrio non producendo che pressioni sopra i piani verticali. Finalmente la medesima espressione (5) può annullarsi ancora per $\alpha=0$: ma conservandosi la r diversa dallo zero, il cono si trasforma in un cilindro, il quale non concepirebbe alcun moto.

Da queste osservazioni risulta che nel caso dei piani convergenti non esiste pel doppio cono veruna posizione, fuori di quella corrispondente ad $y = h$, nella quale possa trovarsi in equilibrio.

6. La retta che congiunge i centri delle due ellissi , e l'asse del cono sono nel medesimo piano orizzontale, assegnato dunque che sia il semi-asse minore dell' ellisse cui il piano verticale è tangente, si avrà pure l'altezza al disopra dell'orizzonte del centro del cono.

Se ora si determina l'equazione della ellisse, di cui MN è l'asse maggiore, si trova facilmente

$$y_1^2 = \frac{(d - x_1)x_1 \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)}{\cos^3\alpha}$$

ove x_1, y_1 sono le coordinate di qualunque punto dell'ellisse, e d è l'asse maggiore. Fatto quindi $x = \frac{d}{2}$ e rappresentato per b il semi-asse minore avremo

$$b = \frac{r(h - y)}{h} \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)}{\operatorname{sen}\beta}\right)}.$$

Indicando per a l'altezza dei piani verticali, e designando per X, Y le coordinate del centro del cono sarà

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= x + \frac{r(h - y)}{h}, \\ Y &= a + \frac{r(h - y)}{h} D, \end{aligned} \right.$$

ponendo

$$D = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)}{\operatorname{sen}\beta}\right)}.$$

7. Se tra queste equazioni si elimina la x ne risulta l'equazione alla linea descritta dal centro del cono. A questo fine si riprenda

$$y = m + x \operatorname{tang}\varphi$$

e si sostituisca nella prima, il che fatto troviamo

$$x = \frac{hX - r(h - m)}{h - r \operatorname{tang}\varphi}.$$

La seconda delle (6) ci dà

$$hY = ah + Dhr - Dry$$

nella quale sostituito il valore della y dato in X si ha facilmente

$$Y = -\frac{Dr \operatorname{tang} \varphi}{h - r \operatorname{tang}\varphi} X + a + \frac{Dr(h-m)}{h - r \operatorname{tang}\varphi},$$

la quale ci rappresenta una retta che forma angolo ottuso coll'asse delle ascisse positive per tutti i valori di $h > r$ tangφ.

Quando fosse

$$h - r \operatorname{tang} \varphi = 0$$

la retta diverrebbe parallela all'asse delle ordinate, e disterebbe dal medesimo di

$$X = \frac{r(h-m)}{h}.$$

Ora se alla condizione

$$h - r \operatorname{tang} \varphi = 0$$

si aggiunge la relazione

$$r = h \operatorname{tang} \alpha$$

avremo facilmente

$$1 - \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \varphi = 0$$

onde

$$\varphi + \alpha = 90^\circ,$$

ed il cono non prende che una sola posizione.

8. Vediamo ora di assegnare le coordinate del punto di partenza, e quelle della cessazione del moto del doppio cono lungo le due direttrici.

Essendo al principio del moto

$$x = -\frac{r(h-m)}{h}$$

$$y = m - r \operatorname{tang} \varphi + \frac{rm \operatorname{tang} \varphi}{h}$$

avremo, sostituendo nelle (6)

$$X = -\frac{r(h-m)}{h} + \frac{r}{h^2}(h-m)(h + r \operatorname{tang} \varphi),$$

e quindi

$$X = \frac{r^2(h - m)\tang\varphi}{h^2}$$

$$Y = a + \frac{Dr(h - m)(h + r\tang\varphi)}{h^2}$$

nelle quali può introdursi facilmente l'angolo α appartenente al cono, avvertendo essere

$$r = h\tang\alpha$$

e sarà

$$X = (h - m)\tang\varphi\tang^2\alpha$$

$$Y = a + D(h - m)(1 + \tang\alpha\tang\varphi)\tang\alpha\,;$$

le quali, nel caso di $\alpha = 0$, cioè quando il cono si muta in un cilindro, diventano

$$X = 0\,,\quad Y = a.$$

Per avere le coordinate corrispondenti alla cessazione del moto rotatorio, osserveremo che in tal caso X, x divengono eguali, e però essendo

$$h - m = x\tang\varphi$$

sarà

$$X_1 = x = \frac{h - m}{\tang\varphi},$$

il quale valore sostituito nell'equazione alla retta che viene percorsa dal centro del doppio cono, avremo immediatamente

$$Y_1 = a.$$

Prendendo ora la differenza fra le ascisse X_1, X troveremo

$$X_1 - X = \frac{h - m}{\tang\varphi} - (h - m)\tang\varphi\tang^2\alpha$$

ovvero

$$X_1 - X = (h - m)\left(\frac{1 - \text{tang}^2\alpha \ \text{tang}^2\varphi}{\text{tang}\ \varphi}\right)$$

ed ancora

$$X_1 - X = (h - m)\ \frac{\cos(\varphi + \alpha)\cos(\varphi - \alpha)}{\text{tang}\ \varphi \cos^2\varphi \cos^2\alpha}\ .$$

La differenza fra le ordinate Y_1, Y ci dà

$$Y_1 - Y = -\ \frac{D(h - m)\text{tang}\ \alpha \cos(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha \cos \varphi}\ .$$

Se poniamo

$$L^2 = (X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2$$

avremo dopo alcune riduzioni

$$L = \frac{(h - m)\cos(\varphi - \alpha)}{\text{tang}\ \varphi \cos^2\alpha \cos^2\varphi} \sqrt{[\cos^2(\varphi + \alpha) + D^2 \text{sen}^2\alpha\ \text{sen}^2\varphi]}.$$

E poichè

$$D^2 = \frac{\text{sen}(\beta + 2\alpha)}{\text{sen}\ \beta}$$

e

$$\beta = 90° + \varphi - \alpha$$

così, essendo

$$D^2 = \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)}\ ,$$

troveremo

$$L = \frac{(h - m)\cos(\varphi + \alpha)}{\text{tang}\ \varphi \cos^2\alpha \cos^2\varphi} \sqrt{[\cos^2(\varphi - \alpha) + \text{sen}^2\alpha\ \text{sen}^2\varphi]}$$

la quale per $\varphi = 0$ diventa infinita; per $\varphi = \alpha$

$$L = \frac{2(h - m)\cos 2\alpha}{\text{sen}2\alpha \cos^2\alpha} \sqrt{(1 + \text{sen}^4\alpha)}$$

che per $\alpha = 0$ è ugualmente assurda.

Se poi si ammette la condizione

$$1 - \text{tang}\,\varphi\ \text{tang}\,\alpha = 0\,,$$

essendo allora

$$\cos(\varphi + \alpha) = 0$$

risulta $L = 0$.

9. Riflettendo ora, che il tempo impiegato dal centro di gravità del doppio cono a percorrere la lunghezza L della retta per la quale esso muovesi, è quel medesimo che si impiega dal cono a percorrere le direttrici, dunque il triangolo rettangolo di cateti $X_1 - X$, $Y_1 - Y$ e di ipotenusa L essendo il piano inclinato pel quale scende il centro di gravità del doppio cono, ne siegue la facile determinazione della espressione del tempo nel quale dura il moto di esso cono. Di fatti considerando il suo peso P decomposto in due l'uno normale alla retta L e l'altro parallelo ad essa basterà sostituire nelle formole del moto uniformemente accelerato il peso relativo. Così dicendo n l' angolo formato dalla retta L coll'asse delle ascisse negative avremo P sen.n per la espressione del peso che produce il moto del doppio cono, ed essendo

$$\text{tang}\,n = \frac{Dr\ \text{tang}\,\varphi}{h - r\ \text{tang}\,\varphi}$$

avremo

$$\frac{\text{sen.}\,n}{Dr\ \text{tang}\,\varphi} = \frac{\cos.n}{h - r\ \text{tang}\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{[D^2r^2\text{tang}^2\varphi + (h - r\ \text{tang}\varphi)^2]}}$$

dalla quale

$$\text{sen.}n = \frac{Dr\ \text{tang}\,\varphi}{\sqrt{[D^2r^2\text{tang}^2\varphi + h^2(1 - \text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\varphi)^2}}$$

e perchè generalmente $s = \frac{gt^2}{2}$, e nel caso attuale

$$s = L\,,\ g = \frac{PDr\ \text{tang}\,\varphi}{\sqrt{[D^2r^2\text{tang}^2\varphi + h^2(1 - \text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\varphi)^2]}}$$

risulta

$$t = \sqrt{\left(\frac{2L\sqrt{[D^2r^2\tang^2\varphi + h^2(1 - \tang\alpha \tang\varphi)^2]}}{PDr \tang\varphi}\right)}$$

dalla quale chiaramente apparisce che al crescere del peso P del doppio cono, diminuisce il tempo.

Questa espressione del tempo diverrebbe nulla nel caso che avesse luogo la condizione

$$1 - \tang\varphi \tang\alpha = 0$$

perchè allora $L = 0$.

10. Tralasciamo di considerare la velocità acquistata mentre essa è dovuta all'altezza del piano inclinato, cioè

$$Y_1 - Y = \frac{D(h - m)\tang\alpha \cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha \cos\varphi} .$$

11. Passiamo ora a considerare il moto del doppio cono nella supposizione che le rette direttrici siano esse medesime inclinate all' orizzonte sotto di un angolo θ. Riterremo qui le medesime denominazioni, ed avvertiremo che le sezioni del cono fatte dalle direzioni dei piani verticali, sono nelle stesse condizioni del caso antecedente, onde per l'asse maggiore avremo

$$MN = \frac{l(h-y)\sen 2\alpha}{h \sen\beta} = \frac{2r(h-y)\cos\alpha}{h\cos(\varphi' - \alpha)} ;$$

ove φ' è la metà dell'angolo che tra loro formano le due direttrici, ond'esso non deve confondersi con quello che tra loro fanno i piani verticali. Però tra questi due angoli φ', φ e θ, per la formola fondamentale della trigonometria sferica abbiamo

$$\cos 2\varphi' = \sen^2\theta + \cos^2\theta \cos 2\varphi ,$$

dalla quale facilmente deduciamo

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\varphi' = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi' = \sqrt{(1-\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta)}\,, \end{cases}$$

e per tal modo l'asse maggiore di una qualunque ellisse sarà dato per le consuete quantità.

12. Una simigliante modificazione si dovrà pure praticare nella espressione che dà il valore del semi-asse minore della medesima ellisse, cioè

$$b = \frac{r(h-y)}{h}\sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi'+\alpha)}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right)}\,.$$

Rispetto di questo semi-asse osserveremo, che essendo desso perpendicolare alla direttrice AB (fig. 2.[a]) ne siegue che il punto n del contatto del doppio cono, e quindi della rotazione del medesimo non trovasi sulla stessa retta verticale che passa pel centro m della ellisse, e che queste rette cioè il semi-asse minore, e la verticale formano tra loro l'angolo θ, onde

$$ms = b\,\mathrm{tang}\,\theta.$$

Per assegnare il braccio di leva variabile col quale il peso del doppio cono tende a produrre la rotazione, immaginiamo che pel centro della ellisse passi un piano parallelo alle retti direttrici, e così avremo

$$\mathrm{M}v = \frac{\mathrm{M}r}{\cos\varphi'} = \frac{r(h-y)}{h\cos\varphi'}$$

sarà

$$mv = \frac{\mathrm{M}r}{\cos\varphi'} - \frac{\mathrm{MN}}{2} = \frac{r(h-y)}{h\cos\varphi'} - \frac{r(h-y)\cos\alpha}{h\cos(\varphi'-\alpha)}$$

ed ancora

$$mv = \frac{r(h-y)}{h}\left(\frac{1}{\cos\varphi'} - \frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right).$$

Se ora da questa espressione tolgasi ms troveremo

$$vs = \frac{r(h-y)}{h}\left[\frac{1}{\cos\varphi'} - \frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right] - b \tang\theta,$$

la quale moltiplicata per $\cos\theta$ ne dà la distanza del punto di contatto dal piano verticale che passa per l'asse del doppio cono, valutata però nel piano che contiene l'asse maggiore della ellisse, e la retta direttrice : e quindi se la medesima espressione si moltiplica per $\cos\varphi$ si avrà il cercato braccio di leva, ossia la perpendicolare calata dal punto di contatto all'indicato piano verticale, la quale rappresentata per λ avremo

$$\lambda = \frac{r(h-y)}{h}\left[\frac{1}{\cos\varphi'} - \frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right]\cos\varphi\cos\theta - b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,$$

ove sostituito il valore di b risulta

$$\lambda = \frac{r(h-y)}{h}\left[\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\cos\varphi'} - \frac{\cos\alpha\cos\theta\cos\varphi}{\cos(\varphi'-\alpha)} - \sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi'+\alpha)}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right)}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\right].$$

13. Da questa espressione rileviamo che il braccio di leva è nullo per $y = h$, come nel caso delle direttrici orizzontali, e che può qui annullarsi ancora per una particolare relazione fra gli angoli, onde sia

$$\frac{\cos\varphi\cos\theta}{\cos\varphi'} - \frac{\cos\alpha\cos\theta\cos\varphi}{\cos(\varphi'-\alpha)} - \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi'+\alpha)}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right)} = 0$$

nel qual caso la direzione del peso passando per l'asse di rotazione, non ha più luogo il moto, e tolto $\cos\varphi$ che non può esser nullo, avremo

$$\frac{\cos\theta}{\cos\varphi'} - \frac{\cos\alpha\cos\theta}{\cos(\varphi'-\alpha)}\ \mathrm{sen}\,\theta\sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi'+\alpha)}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right)} = 0.$$

Se qui facciamo $\theta = 0$, per le (7) essendo $\varphi' = \varphi$ troviamo

$$\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi - \alpha)} = 0$$

ovvero

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi = 0$$

come al § 5 pel caso delle direttrici orizzontali.

Se $\varphi = 0$, nel qual caso è pure $\varphi' = 0$ sarà

$$\cos\theta - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta = 0;$$

equazione assurda la quale dimostra che non può aver luogo l'equilibrio a meno che non sia

$$\operatorname{sen}\theta = 0.$$

14. Si può giungere alla stessa equazione di condizione per l'equibrio coll'assegnare le ascisse del cono doppio, e della retta che congiunge i punti di contatto.

Designando di fatto per X l'ascissa dell'asse del doppio cono sarà

$$X = x + Mr'$$

ma

$$Mr' = \frac{r(h - y)\cos\theta}{h}$$

onde

$$X = x + \frac{r(h - y)\cos\theta}{h}.$$

Se ora si rappresenta per X' l'ascissa della retta che unisce i punti del contatto sarà

$$X' = x + Ms.\cos\varphi'\cos\theta,$$

essendo però

$$Ms = \frac{MN}{2} + ms = \frac{r(h - y)\cos\alpha}{h\cos(\varphi' - \alpha)} + b\operatorname{tang}\theta$$

avremo ancora

$$X' = x + \frac{r(h - y)\cos\alpha\cos\varphi'\cos\theta}{h\cos(\varphi' - \alpha)} + b\operatorname{sen}\theta\cos\varphi'.$$

Se ora si vuole che il sistema sia in equilibrio deve volersi che i piani verticali i quali passano per l'asse del doppio cono, e per la retta del contatto si confondino, onde

$$X' = X$$

e quindi

$$\frac{r(h-y)}{h}\left[\cos\theta - \frac{\cos\alpha\cos\varphi'\cos\theta}{\cos(\varphi'-\alpha)} - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi'\sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi'+\alpha)}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right)}\right]=0$$

dalla quale deducesi la stessa relazione fra gli angoli. Da essa con facili trasformazioni si ricava

$$\operatorname{tang}\varphi'\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos\alpha}\sqrt{(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\varphi')}.$$

15. Vediamo ora di assegnare l'ordinata Y del centro di gravità del doppio cono; avremo

$$Y = PM + Mv.\operatorname{sen}\theta$$

ma

$$PM = a + \frac{x}{\cos\varphi}\operatorname{tang}\theta + \frac{b}{\cos\theta}$$

ed

$$x = \frac{y-m}{\operatorname{tang}\varphi},$$

$$Mv = \frac{r(h-y)}{h\cos\varphi'}$$

dunque

$$(8) \qquad Y = a + \left(\frac{y-m}{\operatorname{sen}\varphi}\right)\operatorname{tang}\theta$$

$$+ \frac{r(h-y)}{h}\left[\frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi'+\alpha)}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right)} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\varphi'}\right]$$

avendo ancora

$$X = \frac{y-m}{\operatorname{tang}\varphi} + \frac{r(h-y)}{h}\cos\theta$$

eliminando fra queste due equazioni la y otterremo una equazione di primo grado che sarà la retta percorsa dal centro di gravità del doppio cono la quale si troverà rappresentata da

$$Y = \frac{X}{\cos\varphi\,(h - r\cos\theta\,\text{tang}\varphi)}\left[h\,\text{tang}\theta - \frac{r\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\theta}\sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi'+\alpha)}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right)}\right.$$

$$\left. - \frac{r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta}{\cos\varphi'}\right] + a + \frac{r(h - m)(1 - \text{tang}\varphi\,\text{sen}\theta)}{h - r\cos\theta\,\text{tang}\varphi},$$

ove fatto

$$\theta = 0$$

ritorna immediatamente quella retta avuta per le direttrici orizzontali.

16. Per assegnare l'altezza del centro di gravità del doppio cono al principio del moto è d'uopo osservare esser nulla l'ascissa della retta che congiunge i punti di contatto, cioè

$$X' = 0\,,$$

onde avremo

$$x + \frac{r(h-y)}{h}\left[\frac{\cos\alpha\,\cos\varphi'\cos\theta}{\cos(\varphi'-\alpha)} + \text{sen}\theta\;\cos\varphi'\sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi'+\alpha)}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right)}\right] = 0$$

ovvero

$$x + \frac{Ar\,(h - y)}{h} = 0$$

ove

$$A = \frac{\cos\alpha\cos\varphi'\cos\theta}{\cos(\varphi'-\alpha)} + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi'\sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi'+\alpha)}{\cos(\varphi'-\alpha)}\right)}.$$

Essendo però

$$y = m + x\,\text{tang}\,\varphi$$

avremo dalla coesistenza di queste due equazioni

$$x = \frac{Ar(m - h)}{h - Ar\tan\varphi}$$

la quale per $\theta = 0$ facilmente si muta in

$$x = -\frac{r(h-m)}{h}$$

come si trovò al § 4 pel caso delle direttrici parallele all' orizzonte.

Avuta l'ascissa dell'estremità dell'asse maggiore dell' ellisse corrispondente al principio del moto, avremo l'ordinata dalla formola

$$y = \frac{h(m - \mathrm{A}r \operatorname{tang} \varphi)}{h - \mathrm{A}r \operatorname{tang} \varphi} .$$

Da questa espressione facilmente si ricavano i valori delle seguenti quantità:

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{r(h-y)}{h} = \dfrac{r(h-m)}{h - \mathrm{A}r \operatorname{tang} \varphi} \\[2ex] y - m = -\dfrac{(h-m)\mathrm{A}r \operatorname{tang} \varphi}{h - \mathrm{A}r \operatorname{tang} \varphi} \end{cases}$$

i quali valori sostituiti nella formola

$$\mathrm{Y} = a + (y-m)\frac{\operatorname{tang} \theta}{\operatorname{sen} \varphi} + \frac{\mathrm{B}r(h-y)}{h}$$

ove

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\cos \theta}\sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi' + \alpha)}{\cos(\varphi' - \alpha)}\right)} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \varphi'}$$

avremo

$$\mathrm{Y} = a + r(h-m)\left[\frac{\mathrm{B} \cos \varphi - \mathrm{A} \operatorname{tang} \theta}{h \cos \varphi - \mathrm{A}r \operatorname{sen} \varphi}\right]$$

ove, se facciasi

$$\theta = 0 \, , \; \varphi = \varphi'$$

ne dedurremo facilmente, essendo

$$\mathrm{B} = \sqrt{\left(\frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)}\right)} = \mathrm{D} \, , \quad \mathrm{A} = \frac{\cos \alpha \cos \varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

$$Y = a + \frac{Dr(h - m)}{h - \dfrac{r \operatorname{sen} \varphi \cos a}{\cos(\varphi - a)}}$$

$$= a + \frac{Dr(h - m)[\cos \alpha \cos \varphi + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi]}{h \cos \alpha \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi (h \operatorname{sen} \alpha - r \cos \alpha)}$$

ma essendo

$$h \operatorname{sen} \alpha - r \cos \alpha = 0$$

risulta

$$Y = a + \frac{Dr(h - m)}{h}(1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \varphi)$$

come al § 8.

Se nella espressione (8) si pongono i valori (9) otterremo l'ascissa del centro corrispondente al punto di partenza espressa da

$$X = r(h - m)\left[\frac{\cos \theta - A}{h - Ar \operatorname{tang} \varphi}\right].$$

Se ora vogliamo assegnare le coordinate del medesimo centro corrispondenti alla cessazione del moto lungo le direttrici basterà supporre

$$y = h$$

tanto nel valore dell'ascissa quanto in quella della ordinata, e così troveremo

$$Y = a + \left(\frac{h - m}{\operatorname{sen} \varphi}\right) \operatorname{tang} \theta \quad \text{ed} \quad X = \frac{h - m}{\operatorname{tang} \varphi}.$$



SUR L'INDUCTION ÉLECTROSTATIQUE
TROISIÈME LETTRE [1]
de
M. P. VOLPICELLI
à
M. REGNAULT.

« Les premières expériences faites pour reconnaître si l'induction électrostatique peut s' effectuer même par des lignes courbes, sont dues à l'illustre Faraday [2], qui, dans une de ses plus récentes publications [3], dit que par ces expériences il a cru établir la *possibilité* de cette induction. Peut-être les faits que je vais avoir l' honneur de vous communiquer, et qui se vérifient parfaitement quand l'atmosphère est sèche, pourront-ils en fixer la *certitude*.

» 1°. Qu'on mette à la distance de $0^m,03$ du centre d' une plaque métallique horizontale non isolée , longue et large $0^m,15$, un corps électrisé ; que de l' autre côté on applique à son centre un plan d'épreuve, et que celui-ci soit porté sur le bouton de l'electroscope de Bohnemberg, l' induction produite sur le plan d' épreuve sera nulle, ou presque nulle. Qu'on éloigne le centre de la plaque du corps électrisé, l'induction sur le même plan croîtra au fur et à mesure que la distance augmentera, mais cela jusqu'à une certaine limite, facile à déterminer pour chaque ex-

---

(1) Pour les deux premières lettres, voyez Comptes Rendus, T. XL — 1855, p. 246; et T. XLI — 1855, p. 553.

(2) De La Rive, Traité d'électricité. Paris 1855, T. I, p. 138, et 140.

(3) Archives des sciences phys. et nat. Genève 1856, T. XXXI , p. 50.

périence, puis les inductions diminueront continuellement jusqu'à ce qu'elles redeviennent nulles.

» Si, au contraire, on maintient fixe la plaque horizontale, mais que le plan d'épreuve, placé d'abord à $0^m,03$ du centre de la plaque, soit successivement éloigné, les inductions se manifesteront d'abord croissantes, puis enfin décroissantes. Ces expériences semblent indiquer que l'induction procède aussi par lignes courbes de l'inducteur à l'induit; et qu'entre ceux-ci il y a une distance qui répond à un maximum d'effet.

» 2°. Qu'on mette sur la même plaque horizontale un pendule assez léger et non isolé, celui-ci divergera de la verticale, toutes les fois qu'au-dessous de cette plaque un corps électrisé s'approchera du bord le plus proche du pendule. Cette experience conduit évidemment à la même conclusion que la précédente.

» 3°. Qu'on prenne un cylindre de papier doré, qu'on le soutienne par son centre de gravité au moyen d'une aiguille verticale, établie sur une base isolante ou non, mais inébranlable, et dans une atmosphère tout à fait calme, et qu'on l'assujettisse à l'induction, et qu'ensuite on approche verticalement, par un de ses côtés, une plaque métallique, isolée ou non, de l'intervalle qui sépare l'inducteur de l'extrémité du cylindre induit; aussitôt celui-ci recevra un mouvement rotatoire en s'éloignant de la plaque, et aprés quelques oscillations il s'arrêtera dans une nouvelle position d'équilibre, formant un angle avec la première. Le cylindre employé avait son axe de $0^m,4$, et son diamètre de $0^m,03$. Cette expérience montre que l'induction sur le cylindre se fait également par lignes courbes, et que la plaque métallique isolée ou non, interceptant ces lignes d'un seul côté, produit un changement dans les forces attractives, de manière à diminuer l'intensité de leur résultante, et à en changer la direction. D'où l'axe du cy-

lindre induit doit, par ce nouveau système de forces, trouver en roulant un autre équilibre, dans lequel il reste incliné à sa première direction. Si la plaque et le cylindre ne sont pas isolés, la déviation indiquée sera plus grande qu'elle ne le serait, à circonstances égales, avec un cylindre isolé.

» 4.° Mettant entre l'induit et l'inducteur un écran métallique non isolé, large et long de $0^m,5$, avec un trou dans le milieu, de telle sorte que l' induction curviligne sur le cylindre mobile soit entiérement interceptée de tous côtés, celui-ci ne subira aucune déviation si une plaque métallique non isolée est approchée verticalement d'un de ses côtés, à la distance qui est entre le trou et l'extrémité du cylindre induit.

» 5.° Ayant intercepté, seulement d'un côté, l'induction curviligne avec des plaques métalliques différentes, la déviation du cylindre s'est trouvée pour toutes la même (1). C'est un résultat qu'on obtient constamment, même quand les lames métalliques sont excessivement minces.

» 6.° Les corps diléctriques, et spécialement la gomme laque et le soufre, qùi possédent le plus grand pouvoir inductif (2), renforcent même l'induction curviligne, comme le démontre la rotation du cylindre indiqué, produite par des plaques isolantes : celles qui ont été employées avaient de $0^m,02$ à $0^m,06$ d'épaisseur. En outre, posant l'extrémité du cylindre mobile entre deux coïbents d'égale épaisseur, mais de nature diverse, ce cylindre, par l'induction curviligne, tournera vers celui des deux coïbents qui possède le

(1) De la Rive, Traité d'électricité. Paris 1854, T. I, p. 131. — Archives des sciences phys. et nat. Genève 1856, T. XXXI, p. 66.

(2) De la Rive, idem, p. 133. — Pianciani, Elem. di fisico-chim. Roma 1844, vol. II, p. 13. — Belli, Corso di fisica, Milano 1838, vol. III, p. 239, et 242. — Becquerel, Traité d'électr. Paris 2855, T. I, p. 42.

plus grand pouvoir inductif. En observant les angles de déviation on trouvera confirmés les différents pouvoirs inductifs du verre, du soufre, de la gomme laque, de la résine, des électrophores, et de la cire d'Espagne. Si l'extrémité du cylindre est entre deux masses du même coïbent, mais l'une plus épaisse que l'autre, le cylindre tournera par l'induction curviligne vers la masse la plus épaisse. La distance entre l'induit et l'inducteur demeurant constante, le pouvoir inductif du coïbent, placé entre eux, croît avec l'épaisseur de celui-ci. De ces expériences j'ai pu même conclure que le pouvoir inductif des coïbents varie avec leur température, c'est-à-dire qu'il diminue quand la température croît, et *vice versâ*. Ce qui s'accorde avec l'observation de M. Matteucci, sur la perte que font les coïbents de leur pouvoir isolant par une élévation de température, incapable de changer sensiblement leur cohésion. [1]

» 7.° Soumettant à l'induction un cylindre également mobile, mais de verre entièrement recouvert de cire d'Espagne, les déviations du cylindre, par des plaques conductrices ou non, s'obtiennent également comme pour le cylindre conducteur. Donc, non-seulement l'induction rectiligne, mais encore la curviligne agit sur les coïbents, de même que sur les conducteurs.

» 8.° Dans une sphère métallique creuse, ayant pratiqué deux trous diamétralement opposés, j'ai introduit par ces trous deux cylindres métalliques les fixant avec le meilleur isolant possible, moitié dehors, moitié au dedans de la sphère. Leurs extrémités intérieures étaient distantes l'une de l'autre de $0^m,09$, et au centre de cette distance était placé un disque métallique plus grand que la section tran-

---

(1) Archives des sciences phys. et nat. Genève 1848. T. VII, p. 127. — Comptes Rendus de l'Acad. des sc. du 20 décembre 1847, T. XXV, p. 935.

sversale des cylindres, et disposé normalement à leur axe; de telle sorte que l'induction rectiligne d'un cylindre sur l'autre était complétement empêchée par le disque lui-même. En outre, j'ai empêché, par d' autres écrans conducteurs, tont effet d'induction qui eût pu avoir lieu à l'extérieur de la sphère entre les deux cylindres. Toutes autres précautions nécessaires étant prises, j' ai fait dans la sphère le vide jusqu'à un dixième de millimètre, avec une très-bonne machine pneumatique de M. Breton. Les superficies intérieures et extérieures de la sphère, aussi bien que le disque intérieur, étant déjà en communication avec le sol, j'électrisai un des deux cylindres, et je trouvai que l'autre était toujours induit. J'obtins aussi le même effet sans communiquer l'électricité à un des deux cylindres, mais induisant seulement sur l'un d'eux. De là, on peut conclure que l'induction curviligne se manifeste aussi dans le vide indiqué. Je fis rentrer l'air dans la sphère, et, répétant l'expérience de la même manière, j' ai trouvé que l'induction curviligne dans le méme vide est sensiblement plus forte à circonstances égales. Ayant ôté le disque entre les deux cylindres, j'ai trouvé que le plus grand pouvoir inductif se produit dans le vide, et que le rapport entre ce pouvoir et celui de l'air change evec l' état hygrométrique de celui-ci. Tout cela s'accorde parfaitement avec les expériences faites dans le vide, d'abord par Dufay, ensuite par Boyle (1), puis par Hawksbee, Gray, Harvis et Becquerel (2), et aussi par Beccaria et Davy (3), et encore avec les expériences que j'ai faites sur l'électricité d'*abandon* (4). En effet, si l'on éloigne les corps qui sont près de l'

(1) Becquerel, Traité d'élec. Paris 1855, T. I, p. 128.
(2) Becquerel, Traité d'élec. Paris 1855, T. I, p. 15.
(3) Belli, Corso di Fisica, Milano 1838, vol. III, p. 345.
(4) Comptes Rendus de l'Acad. des sc. T. XLI, p. 543.

induisant, son induction sur les autres qui l'entourent augmente; ainsi, quand on enlève l'air qui enveloppe un cylindre électrisé, celui-ci induira plus énergiquement sur les corps voisins. Après avoir analysé les plus importantes expériences électrostatiques faites dans le vide par les physiciens les plus habiles, le R. P. Pianciani [1] en déduit: 1.° que le vide parfait n'est pas bon conducteur; 2.° que les attractions et les répulsions électriques ne sont pas dues à la présence de l'air; 3.° que l'électricité n'est pas retenue sur la surface des corps par la pression de l'air. Nous pouvons à ces trois conclusions ajouter: 4.° que l'induction électrostatique est plus énergique dans le vide, qui, à ce qu' il parait, doit être regardé comme pourvu du plus grand pouvoir inductif, et dans lequel l'induction se produit même en lignes courbes.

» Je terminerai cette Lettre en faisant remarquer, que l'expérience apprend que l'électrisation et les courants électriques [2] modifient l'état soit physique, soit chimique des corps; mais il me semble que jusqu'à présent, on n'a pas expérimenté sur les effets de la simple induction électrostatique, pratiquée en déchargeant l' induisant, toutes les deux ou trois secondes, pour empécher que l'électricité ne se transporte sur l'induit, et pour agiter fréquemment les molécules de celui-ci. Je soumis pour cela une petite sphère creuse de verre du diamètre de $0^{m},04$ à cette induction, et, après trois mois, n' ayant opéré que deux heures par jour, je vis qu'elle avait perdu sa diaphanéité primitive. Elle se conserve encore aujourd'hui dans cet état. En assujettissant à la même induction et de la même manière un diamant très-limpide, il devint moins limpide de très-peu,

---

(1) Instituzioni fisico-chim. Roma 1834, T. III, p. 50.

(2) Becquerel, T. I, p. 292 et Suiv. — De la Rive, Comptes Rendus, Séance du 7 avril 1856.

il est vrai, pourtant à un degré sensible, et, vu de côté par lumière transmise, il présentait une certaine nuance jaune-verdâtre qu'il n'avait pas auparavant. Comme dans les expériences que je viens d'indiquer, on voit que l'intime constitution moléculaire est modifiée sensiblement dans des corps qui possèdent au plus haut degré la dureté , nous pourrons peut-être en conclure, que par l'effet de la seule induction électrostatique, prolongée autant qu'il est nécessaire, et interrompue fréquemment, tout tissu moléculaire, excepté un fluide élastique, devra subir quelque changement sensible.

» Enfin je soumis à l'induction une des boules du thermoscope de Rumford, et je vis que l'index de l'instrument se portait toujours, pour un trait d'environ $0^m,01$, vers la boule induite. Pour bien reconnaître la cause de cet effet, je répétai plusieurs fois l'expérience en recouvrant la boule induite d'une feuille métallique communiquant avec le sol; et non seulement je vis toujours se reproduire le même effet, mais l'approche de l'index à la boule induite fut plutôt augmentée. Or, comme l'induction ne se communique pas à travers les lames métalliques, quelque minces qu'elles soient, il semble qu'on en peut conclure, que l'induction diminue un peu la température des corps sur lesquels elle s'exerce, et que le thermoscope de Rumford, par son extrême sensibilité, sera le thermo-actinomètre le plus convenable à manifester cette curieuse propriété de l'induction. »



ELOGIO DI CARLO GUSTAVO JACOB JACOBI LETTO NELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI BERLINO IL 1° DI LUGLIO 1852 DA LEJEUNE DIRICHLET.

TRADUZIONE DAL TEDESCO

DI GIOVANNI NOVI

PROFESSORE DI MECCANICA, E DI ARTIGLIERIA NEL LICEO MILITARE DI FIRENZE.

Facendomi ad esporre le scoperte scientifiche del più gran matematico, che dopo Lagrange, abbia fatto parte di questa Accademia, qual socio residente, vedo le gravi difficoltà del mio assunto. Imperocchè si tratti di mostrare tutta l'importanza della elucubrazioni di tale che, avendo percorsa in quasi tutti gli aspetti una scienza già accresciuta da duemila anni di lavoro perseverante, ha escogitato e chiarito, colla sola potenza del suo ingegno creatore, verità importanti e recondite, e di nuovi concetti ha arricchito il patrimonio scientifico, elevando ad alto grado la speculazione matematica. Per quietare l'esitazione che in me produce la coscienza della mia insufficienza, basterà, spero, l'essere convinto che un debito sacro di riconoscenza è giusto si paghi verso tali servigi resi alla scienza e ai suoi cultori. E niuno più di me è in obbligo di soddisfare a questo debito, dacchè se molto fu il profitto che in comune coi miei coetanei trassi dalle scientifiche produzioni del Jacobi, non minore fu quello che derivai dall'intimo commercio che per anni parecchi mi ebbi col grande pensatore.

Carlo Gustavo Jacob Jacobi nacque in Potsdam il 10 decembre 1804 da agiato negoziante. Più che a maestro ebbe a guida nello studio delle lingue antiche e delle matematiche elementari, lo zio materno Sig. Lehmann, sotto la cui sapiente direzione fece sì rapidi progressi, che di dieci anni neppur

compiuti fu ammesso nella seconda classe del Ginnasio di Potsdam, e dopo sei mesi nella prima, e vi rimase in tutto non più che quattro anni per aspettare l'età necessaria a frequentare l'università. Quivi l'insegnamento matematico era praticato come semplice esercizio di memoria; sicchè poco ne restava appagato il giovane allievo, le cui relazioni col maestro furono perciò, per assai tempo, alquanto spiacevoli. Infine il maestro fu abbastanza giudizioso per non contrariare lo straordinario scolare e permettere che questi passasse allo studio dell'*Introductio* di Eulero, mentre gli altri penosamente erano rimasti a recitare proposizioni elementari. E quanto fin d'allora progredito fosse il suo ingegno lo mostra il tentativo che fece di risolvere l'equazione di 5° grado, tentativo di che tenne parola in una sua Memoria posteriore.

Parecchi di quelli che poscia hanno levato grido, sperimentarono le prime loro forze intorno a questo problema; il quale, innanzi che ne venisse dimostrata l'impossibilità, doveva attirare singolarmente gl'ingegni nascenti sì per la celebrità acquistata a causa di tanti sforzi infruttuosi, e sì ancora perchè confinando cogli elementi, sembrava agevole senza molte cognizioni.

Nella nostra università Jacobi passò il suo tempo fra gli studii filosofici, filologici e matematici. Qual'assistente agli esercizii del Seminario filologico, risvegliò l'attenzione del nostro collega Böckh, presidente di questo Istituto, che l'ebbe assai caro pel suo ingegno acuto e singolare, e gli proseguì sempre particolar benevolenza.

Sembra che frequentasse meno le lezioni matematiche, le quali nella nostra università erano allora troppo elementari da poter riuscire di alcun giovamento a Jacobi, già molto innanzi nello studio delle Opere principali di Eulero e di Lagrange. Con maggior zelo però studiò la letteratura matematica, anelando farsi un' idea generale dei

grandi tesori scientifici contenuti nelle raccolte accademiche. Jacobi, il cui ingegno non poteva restringersi a raccoglière cognizioni e mosso potentemente dal bisogno di far sue le cose che leggeva, e interamente padroneggiarle venne nella determinazione, dopo due anni di studii universitarii, di rinunziare alla filologia o alla matematica. E poichè codesta determinazione ebbe conseguenze assai importanti, non solamente per lui, ma altresì per la scienza alla quale d'allora in poi si consacrò interamente, si udranno volentieri le ragioni ch'ei medesimo ne adduceva allo zio; al quale così scriveva :

« Non posso senza pena rinunziare allo studio della filologia , dopochè mi è riuscito intravedere la più riposta magnificenza della vita ellenica. Pure mi è forza di farlo. Lo smisurato colosso che hanno innalzato i lavori di Eulero, Lagrange, Laplace richiede forza prodigiosa di mente, assidua meditazione e ardore alieno da ogni riposo, se vuolsi penetrare la intima natura di quello e dominarlo, affine di non dover temere ad ogni istante di esserne schiacciato. Solo quando ci siamo impadroniti del suo spirito, possiamo lavorare tranquillamente a perfezionare le singole sue parti, e la grande opera con energia condurre a compimento.»

Per la dissertazione del dottorato, Jacobi prescelse la decomposizione delle frazioni algebriche ; soggetto già più volte tolto ad argomento di studii. In questo lavoro egli dimostra una formola notabile, data da Lagrange senza dimostrazione nelle Memorie della nostra Accademia. Poi dà una nuova maniera di decomposizione, la quale non è completamente determinata, come quella esclusivamente considerata sin'allora, e conchiude la Memoria con talune ricerche sulla trasformazione delle serie, nelle quali si mostra già un nuovo principio, di cui si giovò spesso in posteriori lavori.

Conseguito il titolo di dottore e resosi abile all'insegnamento, Jacobi fece all'università una lezione sulla teoria

delle superficie curve e delle curve nello spazio. Secondo la testimonianza di tale che fu presente a quella lezione, l'ingegno magistrale di Jacobi apparve fin d'allora singolare, avendo egli svolto il suo tema con gran chiarezza e in modo da interessare assai la sua scolaresca. Il ventenne maestro fece anche mostra di una precoce maturità di giudizio quando, non sgomento dal discredito nel quale era caduto in quel tempo, per influsso d'un nome autorevole, il metodo degl'infinitamente piccoli, seguì nella sua esposizione appunto codesto metodo, adoperandosi con successo a persuadere ai suoi uditori come il medesimo non differisce da quello rigoroso degli antichi, se non per la sua forma abbreviata, via indispensabile a tutte le ricerche più complicate.

L'attenzione che Jacobi cominciò a risvegliare, indusse le autorità superiori dell'istruzion pubblica ad invitarlo a continuare provvisoriamente le sue lezioni in qualità di professore particolare (aggregato) a Koenisberg; dove, per la cattedra di matematica divenuta allora per l'appunto vacante, si offrivano al merito di lui maggiori speranze di premio che non a Berlino.

Fatto importante per la carriera scientifica di Jacobi nel suo soggiorno a Koenisberg fu la conoscenza personale ch' ei fece del grande astronomo Bessel, e il trovarsi per la prima volta in contatto con un uomo di genio in una scienza così strettamente collegata con la sua. E comecchè egli fosse già fin da giovane abituato al faticoso e sodo studiare, pure la vista diuturna dell'operosità instancabile di questo uomo straordinario esercitò sopra di lui tale una potenza di abiti studiosi, la quale ei stesso ricordò poi sovente, e con riconoscenza.

In quanto a quella parte della vita del Jacobi considerato come scrittore ed autore, fu per lui una buona ventura l'essere esordito su questo terreno quando appunto si

veniva fondando quel Giornale matematico, per la cui pubblicazione il nostro collega *Crelle* acquistò nome tanto grande e duraturo, sì per avere aiutato alla diffusione delle matematiche discipline, e sì ancora per aver dato nuovo impulso allo studio di esse. Jacobi, che fu tra i primi collaboratori del Giornale, vi è rimasto fedele sino alla sua morte; e tranne le due opere particolari « *Fund. nova* » e « *Canon arith.* », quasi a tutti gli altri suoi lavori fu sola palestra il giornale di Crelle.

Le prime Memorie di Jacobi lo mostrano già di buon' ora perfetto matematico; sia che egli esamini con criterii nuovi o più semplici dottrine già conosciute, come ha fatto nelle Note « *Sul metodo di Gauss per la determinazione approssimata degl'Integrali definiti* » e *Sul metodo di Pfaff per l'integrazione dell'equazioni a differenze parziali* »; sia che svolga problemi non ancora risoluti, e pervenga a nuovi risultati. Tra i lavori dell'ultima specie, due sono degni di particolare menzione: una Memoria di poche pagine, nella quale trova una proprietà fondamentale, rimasta per lo innanzi ignota, della notabile funzione; la quale, introdotta per la prima volta da Legendre nella scienza, ha poscia avuto sì gran parte in tutte le posteriori ricerche sull'attrazione: e un'altra Memoria « *Sopra i resti cubici* », la quale contiene a dir vero il solo enunciato delle proposizioni senza dimostrazioni, ma le proposizioni son tali da non potersi reputare trovate per induzione, e per conseguenza non lasciano dubbio che l'autore fin d'allora fosse già in possesso di nuovi e fruttiferi principii in quel ramo della scienza che partecipa dell' Algebra superiore e della Teoria dei numeri, e che venticinque anni prima era stato creato da Gauss. Il che viene confermato da una posteriore pubblicazione dello stesso Jacobi, nella quale è espressamente dichiarato che codesti principii furono in quel tempo comunicati per iscritto a Gauss.

Jacobi venne distolto dal proseguire cosiffatto argomento dalle sue ricerche sulle funzioni ellittiche, le quali dovevano bentosto procacciargli grande celebrità , e collocarlo tra i primi matematici del nostro tempo.

É cosa notabile che il giovane matematico che aveva tentato con successo varie teoriche , non fu sulle prime egualmente felice in questo campo. Uno dei suoi amici trovatolo un giorno pieno d'uggia, e richiestagliene la ragione, n'ebbe per risposta : Voi mi vedete sul punto di restituire alla Biblioteca questo libro (*Legendre*, *Exercices*, ec.), per il quale vedo che non mi aiuta la fortuna. Ogni qualvolta io mi son fatto a studiare altri libri più o meno importanti, sempre mi si sono svegliati nella mente pensieri propri e sempre qualche cosa vi ho guadagnato. Questa volta però ho acquistato nulla, e non mi é rampollata la minima idea.

Se questa volta i propri pensieri si fecero aspettare più dell'usato, però essi comparvero in copia maggiore; e tale che, con quelli contemporanei di Abel, ebbero per conseguenza una inaspettata esplicazione e la completa trasformazione di uno dei più importanti rami di Analisi.

Poichè il progresso venne qui contemporaneamente da due fonti diverse, è necessario esaminare simultaneamente le ricerche di Jacobi e quelle di Abel. Le scoperte di entrambi, in origine indipendenti le une dalle altre , si collegarono poscia fra loro in tal guisa, che l'esposizione delle une senza prendere in considerazione le altre non sarebbe facilmente intelligibile.

La teoria delle funzioni ellittiche, colla quale sono per sempre congiunti i nomi di Abel e di Jacobi, non rimonta al di là della seconda metà del secolo precedente. Un matematico italiano di non comune penetrazione, il conte Fagnano degli Stati Ecclesiastici, fece la notevole scoperta , che l'integrale che esprime l'arco della curva , dai mate-

matici d'allora studiata molto sotto il nome di lemniscata, ha proprietà simili a quelle dell'integrale più semplice, che rappresenta un arco di cerchio. Così, p: e:, egli scoprì che tra i limiti di due integrali di questa specie, di cui uno è uguale al doppio valore dell'altro, ha luogo una semplice relazione algebrica, in guisa che, un arco di lemniscata, comecchè trascendente di ordine superiore, pure può essere raddoppiato o diviso per metà mediante costruzioni geometriche, come un arco di cerchio. Eulero, qualche anno dopo, trovò la vera sorgente di queste ed altre proprietà simiglianti in un teorema, il quale va tra i più bei trovati di questo grande pensatore. Secondo questa proposizione di Eulero, un certo integrale, più generale di quello considerato da Fagnano, e che nell'odierna terminologia toglie nome d'integrale ellìttico di prima specie, dipende in tal guisa dal suo limite, che due integrali di questa specie, con limiti arbitrarii, possono sempre essere riuniti in un terzo, il cui limite è dato in funzione dei primi, mediante una semplice relazione algebrica; al modo stesso che il seno di un arco composto di due parti può essere formato algebricamente coi seni delle sue parti. Ma l'integrale ellittico é più generale di quello che rappresenta un arco di cerchio. Ridotto alla sua forma più semplice, esso dipende non solo dal suo limite, ma anche da un' altra quantità contenuta nella funzione, cioè dal così detto *modulo*. Il teorema di Eulero stabilisce relazioni soltanto tra integrali dello stesso modulo. Il primo esempio di una relazione tra integrali di modulo differente, fu dato da posteriore scoperta fatta da Landen, e in forma alquanto diversa da Lagrange. Per questa scoperta un integrale ellittico può essere trasformato in altro integrale della stessa specie con una semplice sostituzione algebrica.

È gloria non peritura di Legendre di aver riconosciuto nelle menzionate scoperte un ramo importante di Analisi

e di avere atteso quasi tutta la vita ad elevare sopra questi fondamenti una teoria indipendente , che comprende tutti quegl'integrali, nei quali non è contenuta altra irrazionalità, tranne una radice quadrata, sotto la quale la variabile è di grado non superiore al quarto. Eulero aveva già osservato con quali modificazioni il suo teorema poteva applicarsi a tale specie d'integrali; Legendre partendo dal felice pensiero di ridurre tutti questi integrali a forme canoniche fisse, riuscì a questo che esse si riducono a tre specie affatto differenti fra loro; risultato di tanta importanza al perfezionamento della scienza. Nel sottoporre poscia ogni specie a diligente esame, egli scoprì molte delle loro più rilevanti proprietà , delle quali particolarmente quelle che appartengono alla terza specie, erano molto recondite ed ingombre da non poca difficoltà. Solo colla più tenace perseveranza, che persuase a questo gran matematico di ritornare più volte sullo stesso soggetto, potè egli vincere quelle difficoltà, le quali, riguardando alle condizioni della scienza in quel tempo, dovevano apparire quasi insuperabili.

La teoria , come la trovarono Abel e Jacobi , presentava parecchie deduzioni assai oscure , che non potevano chiarirsi coi principii allora conosciuti. Così, per menzionare una di coteste deduzioni, si era trovato che il grado dell' equazione formata con l'aiuto del teorema di Eulero, dalla cui soluzione dipende la divisione degl' integrali ellittici, non è uguale al numero delle parti come nell'analoga quistione della divisione del cerchio, ma al quadrato di questo numero. Il significato delle radici reali , il cui numero si accorda con quello, era manifesto; per contrario le numerose radici immaginarie dovevano apparire affatto inesplicabili. Ma prima di Abel e di Jacobi, a niuno cadde in mente che in ciò si occultasse un qualche segreto; e fu ad essi riserbato di maravigliarsi di questi e si-

mili risultati, la qual cosa nelle matematiche, come nelle altre scienze, è già una mezza scoperta.

Comunque la trasformazione della teorica delle funzioni ellittiche, dovuta ad Abel e a Jacobi, sia risultata dall'azione simultanea di parecchi pensieri che si aiutano reciprocamente, pure a due soltanto di questi pensieri sembra che debba attribuirsi maggiore importanza, essendo essi quelli che penetrano intimamente tutte le parti della nuova teoria. Mentre coloro che si erano precedentemente occupati di questo soggetto riguardavano l'integrale ellittico della prima specie come funzione del suo limite, Abel e Jacobi riconobbero, l'uno indipendentemente dall' altro, (benchè il primo alcuni mesi innanzi), la necessità di considerare per opposto come funzione dell'integrale il limite e due quantità che ne dipendono, le quali sono così strettemente unita ad esso come il seno al coseno; nel modo stesso che le più importanti proprietà delle trascendenti che dipendono dal cerchio si erano ottenute considerando il seno e il coseno come funzioni dell' arco, e non già questo come funzione di quelli.

Un secondo pensiero, comune a Jacobi e ad Abel, il pensiero cioè d'introdurre l'immaginario in questa teoria, fu di ancor maggiore importanza; e Jacobi poi spesso affermò che la sola introduzione delle quantità immaginarie ha sciolti tutti gli enigmi dell'antica teoria. Se vecchia esperienza non ci ammaestrasse che assai di sovente ci apparisce ultimo quello che a noi è più da presso, dovrebbe sembrarci straordinario che un siffatto pensiero fosse sfuggito ad Eulero, fra i più bei trovati del quale si novera quello di aver condotta la teoria delle funzioni circolari, trattandole come grandezze esponenziali immaginarie, a tal grado di semplicità e di estensione, che quasi tutta l' Analisi n' ebbe a sperimentare una trasformazione essenziale.

Mentre Abel e Jacobi introducevano l'immaginario nelle funzioni summentovate, ottenute per via della trasformazione dell'integrale ellittico di prima specie, e dette esclusivamente funzioni ellittiche, secondo l'odierna terminologia, riconobbero che tali funzioni partecipano della natura delle funzioni circolari, ed insieme di quelle delle esponenziali, sì che mentre le prime sono periodiche solo per valori reali dell'argomento e le ultime solo per valori immaginarii, le funzioni ellittiche riuniscono in se entrambe le specie di periodicità.

Postisi sopra un nuovo terreno per virtù di questo concetto fondamentale, Abel e Jacobi rivolsero le loro ricerche verso due differenti regioni della teoria. Abel mirò al problema che ha per oggetto la moltiplicazione e divisione degl'integrali ellittici; e mentre con l'aiuto del principio del doppio periodo penetrava bene addentro nella natura delle radici dell'equazione da cui la divisione dipende, giungeva alla scoperta affatto inaspettata, che la divisione generale dell'integrale ellittico, con limite arbitrario, può essere effettuata sempre algebricamente, cioè per via di semplici estrazioni di radice, ogni qualvolta si presupponga già eseguita la divisione particolare del così detto integrale completo. Questa divisione particolare sembra possibile solamente per moduli speciali, fra i quali il più semplice è quello che corrisponde alla lemniscata. Nel dare la soluzione del problema per questo caso speciale, egli mostrò che la divisione dell'intera lemniscata è al tutto analoga a quella del cerchio, e può essere effettuata per via di una costruzione geometrica negli stessi casi in cui essa divisione é possibile pel cerchio, secondo la bella teoria data 25 anni prima da Gauss.

Intorno a quest'ultimo lavoro di Abel è a richiamarsi una singolarità storica degna di menzione. Nell'introduzione all'ultima sezione delle « *Disq. arith.* », consacrata alla di-

visione del cerchio, Gauss aveva osservato, di passaggio, che lo stesso principio, su cui poggia la divisione del cerchio, è applicabile altresì a quella della lemniscata. Infatti la Memoria di Abel sulla divisione della lemniscata è fondata essenzialmente sul principio di Gauss, secondo il quale le radici dell'equazione da risolvere debbono disporsi in un circolo, sì che ciascuna dipenda dalla precedente alla stessa maniera. Ma se, per la divisione del cerchio, le proprietà già note delle funzioni trigonometriche bastavano per disporre le radici secondo il principio di Gauss, nel caso della lemniscata era necessario, non che alla disposizione al riconoscerne la sola possibilità, di penetrare molto addentro nella natura delle radici; il che soltanto per virtù del principio della doppia periodicità poteva ottenersi. La qual cosa, mercè codesta Memoria di Abel, forma per Gauss una testimonianza solenne come egli, andando innanzi al suo tempo, avesse già fin dal cominciare del secolo, riconosciuto il principio del doppio periodo. Tuttavia siffatta testimonianza, essendo emersa soltanto dai posteriori lavori di Abel, non menoma in niun modo il dritto di questi e di Jacobi a tale trovato.

Le ricerche di Abel, oltre i già menzionati risultati relativi alla divisione, ebbero ancora per conseguenza un'altra scoperta, non meno importante. Ponendo eguale all'infinito il moltiplicatore che si presenta nelle formole per via delle quali egli aveva rappresentate le funzioni ellittiche di un argomento multiplo mercè le funzioni dell'argomento semplice, egli ottenne espressioni di sommo rilievo per le funzioni ellittiche in forma di serie infinite, come pure di quozienti di prodotti infiniti. La qual scoperta è per l'analisi di ancora maggior momento che non la risolubilità algebrica dell'equazioni per la divisione indicata dal medesimo Abel.

Al tempo stesso che Abel proseguiva queste belle ricer-

che, Jacobi travagliavasi intorno ad altre parti dello stesso soggetto, di non minore rilievo. La sostituzione ricordata di sopra, per la quale un integrale ellittico si trasforma in un altro della stessa forma, era sin'allora l'unica della sua specie. A dir vero Legendre, non molto prima del tempo in cui Jacobi rivolse la mente intorno a questo soggetto, aveva trovato una seconda trasformazine dell'integrale ellittico; ma questa seconda trasformazione, che a lui parve ultima, non era conosciuta in Germania, e quindi non altrimenti che per una rara acutezza di mente potevasi dedurre da un anello visibile l'esistenza di una catena infinita, e richiedevasi grande ardimento per proporsi a problema la disamina della natura di cotesta catena.

Una induzione felice, nella quale ebbe parte principale il sottile e affatto nuovo pensiero di considerare la trasformazione e la moltiplicazione da un comune punto di vista, e l'ultima come caso speciale della prima, condusse Jacobi a presentire che funzioni razionali di ogni grado sieno atte a trasformare un integrale ellittico in un integrale della stessa forma. E ciò venne subito confermato dal fatto che il numero dei coefficienti arbitrarii, dei quali si poteva disporre per ogni grado, bastava per soddisfare a tutte le condizioni necessarie affinchè l'integrale trasformato fosse di forma analoga al primitivo. Ma comecchè una così semplice maniera di considerare la quistione, non potesse lasciar dubbio sulla possibilità della cosa, restava pur sempre a fare un gran passo per riconoscere l'intima natura analitica dell'espressione fratta appropriata alla trasformazione. Di qual specie fossero le difficoltà da vincere, e per via di quali ingegnose considerazioni Jacobi le vincesse, non può essere quì dichiarato; come pure non mi è consentito enumerare le importanti conseguenze che risultavano dal problema compiutamente risoluto. Fo menzione soltanto del risultato notevole di siffatta ricerca; cioè che la mol-

tiplicazione può essere composta sempre di due trasformazioni.

Mentre Abel e Jacobi a questo modo venivano perfezionando contemporaneamente la teoria per due diverse direzioni, sembrava che la fortuna volesse compartire eguale ai due giovani emuli l'onore del progresso; perocchè il modo onde uno mandava innanzi il trovato dell'altro, sì tosto ch'era noto, non lascia dubbio che ciascuno di essi avrebbe da se solo compiuto l' intero progresso se l' altro non lo avesse preceduto in una parte del lavoro.

Jacobi nelle sue ricerche aveva preso le mosse dalla supposizione che nella trasformazione la variabile primitiva fosse espressa razionalmente per via della nuova. Abel svolse il problema nella ipotesi più generale che tra le due variabili abbia luogo una qualche equazione algebrica, e riuscì al risultato che il problema, portato a tal grado di generalità, può sempre essere ridotto al caso speciale da Jacobi così compiutamente esaminato.

Con non minore successo Jacobi entrò a trattare la teorica della divisione generale data da Abel. La maniera colla quale Abel aveva risoluto il problema, mostrava, a dir vero, che le radici sono sempre esprimibili algebricamente, ma per l'effettiva rappresentazione delle stesse esigeva la formazione di certe relazioni simmetriche delle radici, la quale poteva conseguirsi solo in ciascun caso particolare. Jacobi da un nuovo principio, che bentosto saremo per accennare, dedusse l'espressione definitiva delle radici accomodata ad ogni grado, e formata immediatamente dai dati del problema; e questa espressione ha su quella di Abel eziandio il vantaggio di una forma molto più semplice. Jacobi sperò sorprendere Abel con questo risultato che perfezionava la soluzione del problema della divisione e ch'egli fece di pubblica ragione in una breve Nota: ma questa speranza restò delusa. Abel era morto, nell'età di anni 27, cioè circa due

anni dopo la pubblicazione del suo primo lavoro sulle funzioni ellittiche. La morte aveva sì presto troncata la splendida carriera di questo intelletto vasto e profondo!

Le ricerche posteriori di Jacobi sulle trascendenti ellittiche, come anche l'ultima testè menzionata, traggono origine da un pensiero al quale, per i suoi risultamenti, deve forse assegnarsi il primo posto fra i concetti di lui. Questo pensiero fu d'introdurre nell'Analisi, come trascendente indipendente, i prodotti infiniti, per i cui quozienti, Abel aveva espresso le funzioni ellittiche. Quando gli riuscì di porre sotto forma di serie cotesti prodotti, che del resto vanno considerati tutti di natura identica e casi particolari di *una sola* trascendente, egli riconobbe una funzione presentatasi già ai geometri francesi nelle ricerche di Fisica matematica. Però mentre quì la detta funzione era stata quasi negletta e solo una delle sue proprietà era stata avvertita, Jacobi la sottopose ad un profondo esame, ne riconobbe la natura analitica e la introdusse nella teoria degl' integrali di seconda e terza specie. La qual cosa ebbe per effetto non solo la cognizione della già nota, ma isolata proprietà dell'intimo legame di quest' integrali, ma anche la rilevante scoperta che gl' integrali di terza specie dipendenti da tre elementi, possono essere espressi per via della nuova trascendente che ne contiene solamente due.

Jacobi, nelle sue lezioni, soleva torre a fondamento dell'intera teorica la considerazione di questa funzione; lo che non solo apportò grande semplicità e chiarezza nell'esposizione di questo soggetto, ma offrì ancora un modello ad altre ricerche posteriori che saranno da noi più sotto.

E niuno vorrà rifiutare a questa funzione il primo grado dopo le trascendenti elementari già da lungo tempo accettate nella scienza, ove si rifletta a queste tre cose; cioè ch'essa domina tutta la teorica delle trascendenti ellittiche; che Jacobi ha dedotto dalle proprietà di quella, importanti teo-

remi della più alta aritmetica; e infine che essa stessa ha parte principale in molte applicazioni, fra le quali ricorderemo solamente la rappresentazione del moto di rotazione data per via di questa trascendente, ch'è uno degli ultimi e più bei lavori di Jacobi. È singolare che una funzione di tanto momento, non abbia ancora altro nome se non quello della trascendente Θ, datole per caso dallo stesso Jacobi nei suoi primi lavori. Onde i matematici adempirebbero ad un dovere di riconoscenza, se si accordassero a mutarlo in quello dell'illustre matematico, per onorare la memoria dell'uomo fra le cui scoperte più belle è da noverarsi quella di avere primo riconosciuta la natura e l'alta importanza di cotesta trascendente.

I menzionati lavori di Abel non sono gli unici nè i più rilevanti fra quelli di cui la scienza va debitrice a questo eminente matematico. La sua maggiore scoperta è contenuta in una proposizione, che porta il suo nome, improntata del suo straordinario intelletto, di cui la proprietà speciale si era di trattare le quistioni scientifiche abbracciandole nella loro più vasta generalità.

Il teorema di Eulero, di che abbiamo sopra favellato — io parlo quì del teorema considerato come principio, e non già delle conseguenze che se ne sono dedotte, le quali di giorno in giorno più si vengono esplicando — formava allora, nel giro del dominio a cui appartiene, il limite della scienza, e per varcarlo invano si erano affaticati Eulero stesso, Lagrange e altri predecessori di Abel. Quale ammirazione deve quindi produrre una scoperta che, comprendendo gl'integrali di qualunque funzione algebrica, ne rivelava la proprietà fondamentale ?

Legendre chiama il teorema di Abel un *monumentum aere perennius*, e Jacobi nota « come esso esprima in semplici forme, e senza apparato di calcolo, i pensieri matematici più profondi e più vasti; e fosse la maggiore sco-

perta matematica dei nostri tempi, comunque tutta la sua importanza non possa venire resa manifesta che soltanto da un nuovo e grande lavoro, forse ancora lontano. »

Questo lavoro è già cominciato, e Jacobi ne ha avuto la parte principale.

Il pensiero di considerare negl'integrali abeliani le funzioni inverse, come con tanto successo si era fatto per gl' integrali ellittici, apparve ben presto ineseguibile e complicato di inestricabile contradizione. Ed invero Jacobi riconobbe subito che queste funzioni inverse dovevano avere quattro periodi e ancora più ; quando è noto che una funzione analitica uniforme e continua allorchè non passa per l'infinito, come le funzioni ellittiche e circolari , ammette due soli periodi. Anche qui un nuovo e recondito pensiero richiedevasi, perchè il teorema di Abel non restasse infecondo, e perchè divenisse il fondamento di una grande teoria analitica.

Jacobi, dopo essersi per più anni affaticato intorno a questo soggetto ed averlo esaminato per tutti gli aspetti, trovò finalmente la soluzione dell'enigma nell'osservazione che in questo caso debbono considerarsi contemporaneamente quattro o più integrali, dai quali, per via d'inversioni, vanno dedotte due o più funzioni di un egual numero di argomenti. Egli fece nota questa divinazione in una Memoria di dieci pagine, alla quale, due anni dopo, ne venne dietro una più vasta, in cui appariva nella sua più chiara luce la natura analitica di queste funzioni inverse.

Comunque la rappresentazione di queste funzioni, trovata posteriormente, non appartenga a Jacobi , ma a due matematici più giovani di non comune ingegno, tuttavia io debbo far menzione di questo importante progresso, da che l'influsso di Jacobi vi apparisce evidente. GOEPEL e ROSENHAIN , togliendo a modello la sopraccennata seconda trattazione della teoria delle funzioni ellittiche, hanno posto a

fondamento dei loro bei lavori la considerazione delle serie infinite, la cui legge di formazione è più generale, ma della stessa natura di quella della serie per la quale viene espressa la funzione Jacobiana.

Benchè nell'esposizione delle scoperte di Jacobi, nel campo delle trascendenti ellittiche ed abeliane, io mi sia ristretto a rilevare le cose più culminanti, tuttavia essa é riuscita così ampia che mi é forza riassumere qui brevemente le altre investigazioni di Jacobi, trascurando molti lavori concernenti solo quistioni speciali e intesi al perfezionamento delle particolarità della scienza.

Abbiamo già innanzi mentovato, come appartenente ai primi lavori del Jacobi, le ricerche di lui sulla divisione del cerchio e l'applicazione di questa all'alta Aritmetica. In cosiffatte ricerche, a cui egli pose a fondamento la forma, che Lagrange aveva dato alla soluzione dell' equazioni binomie, già trovata pel primo da Gauss, s'incontrò in alcuni risultati col gran matematico Cauchy, il quale occupavasi contemporaneamente di simili ricerche. E quando questi, durante il primo soggiorno di Jacobi in Parigi, pubblicò un estratto dei suoi lavori, fece di ciò speciale ricordanza.

Cauchy dalla divisione del cerchio aveva dedotto questo bel teorema; tutti i numeri primi che divisi per un dato numero primo o per il quadruplo dello stesso, danno per resto l'unità, elevati ad una data potenza il cui esponente dipende semplicemente dall'ultimo numero primo, vengono rappresentati per via della così detta forma quadratica principale, che ha per *determinante* il dato numero primo preso negativamente. Or Jacobi ricavò da questo teorema il presentimento che quell'esponente debba accordarsi col numero delle forme quadratiche, diverse le une dalle altre, che corrispondono al menzionato *determinante*. E poichè questo presentimento si confermò in tutti gli esempi numerici, così egli non ebbe difficoltà a pubblicare questa osserva-

zione in una breve Nota. Io mi son creduto in debito, dopo la verbale comunicazione che a me ne fece lo stesso Jacobi, di menzionare, come esempio di sagace induzione, l'origine rimasta sinora ignota di questo risultato; benchè la dimostrazione esatta dello stesso non sembra poter essere fondata sulla divisione del cerchio, ma esigere principii affatto diversi, tolti al calcolo integrale e alla teoria delle serie, i quali sono stati posteriormente introdotti nella scienza.

Aveva Gauss, nel 1832, pubblicato una seconda Memoria sopra i resti biquadratici; la quale levò grido pel profondo pensiero di trattare i numeri interi complessi nell' Aritmetica superiore, alla stessa guisa che i numeri reali, e per la legge di reciprocità ivi stabilita, e che ha luogo nella teoria dei resti biquadratici tra due numeri complessi. Or siffatta Memoria porse occasione a Jacobi di riprendere le sue precedenti ricerche, e gli riuscì di dedurre con grande semplicità dalla divisione del cerchio non solo il bel teorema di Gauss, già mentovato, ma ancora altro simile che si riferisce ai resti cubici.

Benchè le dette ricerche ed altre che vi hanno relazione, delle quali a me non è dato indicare neppure il titolo, fossero da Jacobi completamente scritte negli anni 1836-39, pure egli non si seppe risolvere mai a farle di pubblica ragione. La sua esitazione nasceva dal desiderio di rendere più generali taluni risultati; al che egli non ha trovato agio sufficiente, occupato com'era in tanti altri lavori. Una parte delle sue indagini, e particolarmente la dimostrazione, già accennata, della legge di reciprocità sono pervenute a cognizione di alcuni matematici tedeschi per mezzo delle lezioni stenografate sulla divisione del cerchio e la sua applicazione alla teoria dei numeri, che egli tenne a Koenisberg nell'inverno 1836-37.

Un'altra ricchissima sorgente per l'Aritmetica superiore

Jacobi ha trovato nella teoria delle funzioni ellittiche, dalla quale ha dedotto varii bei teoremi, di cui taluni hanno per oggetto di mostrare in quante maniere uno stesso numero può decomporsi in 2, 4, 6 e 8 quadrati; ed altri riguardano i numeri che sono contenuti simultaneamente in più forme quadratiche. Questi rilevanti acquisti della scienza sono un frutto della soprammentovata introduzione della funzione Jacobiana nella teoria delle trascendenti ellittiche.

Jacobi si è più volte occupato della determinazione e riduzione degl'integrali doppi e multipli. Piacemi qui in ispecialità ricordare il semplice metodo per via del quale egli riduce la determinazione della superficie di una ellissoide ad assi ineguali agl'integrali ellittici di prima e seconda specie; riduzione che Legendre, di cui è una delle più belle scoperte, aveva conseguito giovandosi di proprietà molto recondite degl'integrali di terza specie. In un'altra Memoria Jacobi estese agl'integrali doppi il teorema di addizione di Eulero, e poco appresso osservò che di simile estensione è anche capace il teorema di Abel.

Soltanto una parte dei lavori di Jacobi intorno a questo ramo del Calcolo integrale è stata pubblicata. Una estesa Memoria sull'attrazione dell'ellissoide, benchè da lungo tempo quasi compiuta, è sinora restata inedita e conosciuta solo per via di accidentali comunicazioni. Nell'intendere a questo problema, gli venne fatto trovare il bel teorema, già ottenuto contemporaneamente da Poisson, in virtù del quale l'attrazione di uno strato infinitamente sottile, limitato da due ellissoidi concentriche ed omotetiche, sopra un punto esteriore, può conseguirsi senza segno integrale. Jacobi non fece mai pubblica menzione di questa circostanza, non ostante che avrebbe potuto benissimo invocare la testimonianza di parecchi matematici, ai quali aveva già comunicato il teorema, innanzi che fosse comparso il primo annunzio della Memoria di Poisson.

Alle già esposte ricerche si unisce un altro lavoro di Jacobi, il quale, a causa dei suoi sorprendenti risultati, non può passare quì inosservato. Maclaurin, come è noto, ha per il primo dimostrato il seguente teorema: la figura di equilibrio di una massa liquida omogenea, animata da un moto di rotazione uniforme intorno ad un asse fisso, e di cui le molecole si attirano l'un l'altra con una forza reciprocamente proporzionale ai quadrati delle distanze, è quella di una ellissoide di rivoluzione, se tale è la forma primitiva della massa fluida. D'Alembert e Laplace completarono questo bel risultamento, dimostrando che a ciascun valore della velocità angolare di rotazione, ch'è al disotto di un certo limite, corrispondono due sole figure di equilibrio, le quali sono tutte e due comprese fra le ellissoidi di rivoluzione. Lagrange sembra essere stato il primo che abbia presentito la possibilità che anche una ellissoide a tre assi ineguali possa soddisfare alle condizioni di equilibrio; almeno questo gran matematico trattando siffatto problema, nella sua Meccanica analitica, parte da formole che valgono per una ellissoide qualunque. Ma dalle due equazioni ottenute a questa guisa, e nelle quali i due assi equatoriali sono contenuti simmetricamente, egli stimò poter dedurre, come conseguenza di questa simmetria, che quegli assi *debbono* essere eguali, mentre ciò permetteva solo si affermasse che essi *possono* essere eguali, nel qual caso le due equazioni si riducono ad una, che si accorda con quella trovata prima da Maclaurin e discussa da d'Alembert e da Laplace.

L'autore di un noto trattato, che, seguendo nell'esposizione di questo soggetto le tracce di Lagrange, accompagnava l'accennata conchiusione con la parola *necessariamente*, risvegliò prima il dubbio di Jacobi; il quale, considerando più da vicino e con maggiore esattezza quelle due equazioni, trovò bentosto, a grande maraviglia sua e certo di

tutti i matematici, che anche una ellissoide a tre assi ineguali può soddisfare alle condizioni di equilibrio.

Le ricerche intorno all'attrazione dell'ellissoide indussero Jacobi a volgere la sua attenzione sulle superficie di secondo grado; e dobbiamo a questa occasione la conoscenza di parecchie interessanti proprietà e una genesi elegantissima di queste superficie. I limiti a me imposti mi sforzano a restringermi a questo annunzio, e ad indicare i rimanenti lavori di Jacobi intorno alla Geometria solo pel titolo. Quindi io nomino soltanto la Memoria sopra un problema di Geometria elementare, che prima di lui era stato trattato in casi particolari, e la cui compiuta soluzione egli deduce dalla teoria delle trascendenti ellittiche; le sue ricerche sul numero delle tangenti doppie delle curve algebriche; ed alcune piccole Memorie, nelle quali, per via puramente sintetica e con grande semplicità, egli dimostra alcuni teoremi sulla curvatura delle superficie e sulle linee geodetiche.

Fra le ricerche di maggiore momento di Jacobi debbono noverarsi quelle sulla Meccanica analitica. Hamilton aveva fatto la scoperta notevole che l'integrazione dell'equazioni differenziali della Meccanica, si puó sempre ridurre alla soluzione di due equazioni simultanee a differenze parziali; ma questa scoperta, comunque dovesse apparir degna di osservazione, rimase infeconda sino a che Jacobi non la liberò da una inutile complicazione, mostrando che la soluzione da trovare bastava soddisfacesse ad una sola delle due equazioni a differenze parziali. Per citare una fra le numerose applicazioni di questa teoria, portata a siffatto grado di semplicità, diremo com'egli trattasse il problema, ancora non risoluto, di determinare la linea geodetica sopra un'ellissoide a tre assi ineguali; e come, giovandosi di un istrumento analitico, già prima nelle sue mani manifestatosi efficacissimo, e che ora va sotto il nome di coordi-

nate ellittiche, gli riuscisse integrare quella equazione a differenze parziali, e dare l'equazione della linea geodetica sotto la forma di una relazione tra due integrali abeliani. Questa scoperta di Jacobi è divenuta la base di uno dei più bei capitoli della geometria superiore, che matematici tedeschi, francesi e inglesi hanno rivaleggiato a perfezionare.

Il legame che abbiamo indicato esistere tra un sistema di equazioni differenziali ordinarie ed *una sola* equazione a differenze parziali, condusse Jacobi a riprendere lo studio della teoria dell'equazioni a differenze parziali, della quale egli si era occupato in una delle sue prime Memorie sul metodo di Pfaff. Questo geometra aveva trovato che per integrare una equazione a differenze parziali qualunque con un numero qualsivoglia di variabili, bisognava integrare completamente una serie di sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Jacobi traendo profitto dal legame suaccennato, mostrò come l'integrazione del *primo* dei sistemi considerato da Pfaff era sufficiente per l'oggetto.

Della stessa natura è il perfezionamento, che il Calcolo delle Variazioni deve a Jacobi. È noto che l'annullamento della prima variazione è condizione *necessaria* ma non *sufficiente* dell'esistenza di un massimo o di un minimo e che solo dalla natura della seconda variazione si può dedurre un criterio per giudicare se ha luogo un massimo un minimo ovvero nè l'uno nè l' altro. La teoria come la trovò Jacobi richiedeva per la discussione della seconda variazione nuove integrazioni dopo quelle volute dall' annullamento della prima variazione; il geometra di Koenisberg mostrò che è sufficiente effettuare queste ultime integrazioni, poichè esse contengono le altre.

Se l'indirizzo sempre più manifesto dell'analisi moderna è di sostituire pensieri ai calcoli, vi ha nondimeno alcune parti nelle quali il calcolo ripiglia le sue ragioni. Jacobi, che a cosiffatto indirizzo ha tanto contribuito, fece da va-

lente ch'egli era nella parte tecnica, cose degne di ammirazione anche da questo lato. Il che è provato dalle sue Memorie sulla trasformazione delle funzioni omogenee di secondo grado; sull'eliminazione; sopra i valori simultanei che soddisfano ad un sistema di equazioni algebriche; sulla inversione delle serie e sulla teoria dei determinanti. E rispetto a quest'ultimo capo si deve a lui una compiuta teoria dell'espressioni ch'egli designò col nome di determinanti funzionali. Nel tener dietro all'analogia di queste espressioni coi coefficienti differenziali, egli riuscì ad un principio generale, che chiamò principio dell'ultimo moltiplicatore. Questo principio dà il mezzo di effettuare l'ultima integrazione in quasi tutti i problemi d'integrazione che si presentano nelle applicazioni, perchè somministra *a priori* il fattore integrante necessario.

L'efficacia che Jacobi esercitò sui progressi della scienza apparirebbe incompiuta, se io non parlassi di quella ch'ebbe nella qualità di pubblico maestro. Non era il suo ingegno fatto per ripetere quel che già altri aveva detto; onde le sue lezioni, tutt'altro che elementari, spaziavano soltanto per quelle parti della scienza, nelle quali egli stesso era stato creatore; vale a dire offrivano ampia e ricca messe di svariate dottrine. Il suo insegnamento procedeva chiaro, non di quella chiarezza che spesso è anche comune a mezzano intelletto, ma bensì di una chiarezza di più alta specie. Innanzi tutto egli s'ingegnava ad esporre i pensieri direttivi, che sono fondamento di ogni teoria; ed eliminando ogni artificio, conduceva la soluzione del problema per uno svolgimento così naturale, che nei suoi ascoltatori nasceva speranza di quasi poter creare qualche cosa di simile a quelle che udivano. Il modo facile ond' ei trattava i più difficili argomenti, davagli ragione di poter incoraggiare i suoi uditori, assicurandoli che essi avrebbero solamente a passare per una serie di pensieri affatto semplici.

Straordinario fu il successo di cosiffatto insegnamento, come mi sono ingegnato ritrarlo e come solamente uno spirito creatore può dare. Se oggidì in Germania la conoscenza dei metodi analitici è assai più diffusa che non per lo addietro, se gran numero di giovani matematici ampliano ed arricchiscono la scienza per tutti gli aspetti, Jacobi ha parte principale a questo felice risultato. Quasi tutti sono stati suoi scolari; fu raro che gl'ingegni che venivano nascendo sfuggissero alla sua attenzione; a niuno che fosse da lui conosciuto, è mancato nel consiglio e la sua sollecitudine incoraggiante.

Io mi sono sforzato sinora di rappresentare Jacobi come insigne scopritore ed efficace maestro. Se io mi facessi ora a ritrarlo quale egli appariva fuori il giro delle materie scientifiche a coloro che non coltivano le discipline matematiche, io debbo far notare come fosse fondamento di sua natura il vivere interamente nel mondo del pensiero; e come questo fosse divenuto per lui uno stato abituale e quasi seconda natura, mentre per la maggior parte degli uomini anche insigni esige uno sforzo particolare. Se talora qualche cosa nella vita o nella scienza veniva a svegliare la sua attenzione, egli non riposava, in sino a che non l'avesse ridotta a pensiero proprio. All'operosità intellettuale più instancabile accoppiava così rara memoria, che tutte le cose ond'erasi una volta occupato, egli poteva subito richiamare alla mente, e volgerle a profitto.

Il ricco patrimonio di scienza e di pensieri propri che continuamente era a disposizione di Jacobi, una singolare versatilità d'ingegno ond'ei sapeva adattarsi a qualunque età e qualunque intelligenza, e una maniera di esprimersi arguta e faceta, attiravano al gran matematico, anche nel conversare, insolita considerazione; la quale veniva anche accresciuta dalla sollecitudine con che accondiscendeva a trattare quistioni scientifiche all'improvviso. E questa sol-

lecitudine moveva dalla natura stessa della sua mente, che trovava particolare soddisfazione nel vincere le difficoltà, e quindi piacevasi del rendere altrui intelligibili, con semplici ed accomodate considerazioni, le quistioni scientifiche. E per fare a questo modo gli faceva solamente mestieri di avere la convinzione che quelli coi quali s' intratteneva, stessero con tutto l'animo rivolti alle cose che diceva. Che se al contrario gli paresse osservare non più che una spensierata curiosità, o sivvero udisse manifestare con sussiego opinioni recise da tali che giammai si erano creduti nell'obbligo di coltivare il proprio spirito, allora la pazienza gli veniva meno, ed avea costume di troncare la conversazione con una qualche osservazione ironica, e talora anco mordace. Molti hanno fatto rimprovero a Jacobi dell'avere ostentato troppo, in tali emergenze, la coscienza delle sue forze intellettuali; ma quelli che così lo giudicarono avrebbero forse mutato parere se avessero saputo il prezzo col quale egli aveva acquistato il dritto di avere una tal coscienza di se stesso. Una lettera del 1824, quando Jacobi, ancora affatto sconosciuto, non poteva avere alcuno interesse a ritrarre le sue lotte intellettuali con colori esagerati, contiene i seguenti brani, che io comunico qui testualmente per rendere completo il ritratto di questo uomo straordinario. Jacobi, allora ventenne, si occupava da circa un anno quasi esclusivamente di studii matematici.

» É un aspro lavoro quello che io ho fatto, è un aspro lavoro quello del quale io sono occupato. La diligenza e la memoria non valgono quì sole per condurre alla meta; esse sono serve subordinate alla mente che medita. Ma questa meditazione ostinata che travaglia il cervello, richiede maggior forza di qualunque altro studio assiduo e durevole. Perciò se un continno esercizio di questa facoltà mi ha fatto conseguire un certo grado di forza, non si creda che d' alcun felice dono di natura io n' ebbi agevolata la via.

Aspre, assai aspre fatiche mi è toccato sostenere, e l' angoscia del pensiero ha fortemente più d' una fiata scosso la mia salute. A dir vero la coscienza delle forze ottenute dà la più bella ricompensa del lavoro , e quello incoraggiamento ch' é necessario a perseverare e non venir meno. Uomini senza pensiero , ai quali cotesto lavoro e cotesta coscienza son cose affatto ignote, cercano vilipendere questa consolazione , che sola può non farci cadere l' animo traverso al difficile cammino , rendendo odiosa col nome di presunzione o di arroganza quella coscienza che proviene dal sentirsi uno e libero (giacchè solo nel moto del pensiero l'uomo è libero e con se). Quando l'uomo sente di avere in sè l'idea di una scienza, non può pregiare se non le cose in cui vede il riflesso del suo spirito. Conforme a questa misura è naturale che a lei appaiano futili talune cose , che agli altri possono sembrare degnissime di lode. Così io sono stato spesso rimproverato di superbia, o lodato nel più bel modo, da chi ha creduto enunciare a mio carico un biasimo, mostrandomi altero verso tutto ciò ch'è al disotto di me, e umile solamente verso ciò ch'è più alto. Ma quella scala infinita che nel mondo si vede e in sè e fuori di se, impedisce la stima esagerata di noi stessi col metterci sott'occhio sempre presente da una parte uno scopo infinito e dall' altra il limite delle proprie forze. Io voglio sempre sforzarmi a perseverare in cosiffatta alterigia ed in cosiffatta umiltà, anzi desidero essere sempre più altero e sempre più umile. »

Jacobi ha mostrato nelle più difficili emergenze della sua vita, che non usava una semplice frase, quando ei diceva apprezzare le cose in quanto fossero il riflesso dell'umano pensiero , e tuttociò che al regno di questo non toccasse lui riguardare con disdegno, o almeno con indifferenza. La qual veramente filosofica indifferenza si manifestò nel modo più degno di ammirazione quando fu colpito dalla sven-

tura di dover perdere tutta l'eredità paterna; perdita che avrebbe dovuto riuscirgli pur dolorosa, tanto più che, già sposato da 10 anni, aveva a sostenere la cura di numerosa famiglia. Chi lo vide allora volare presso la madre e confortarla dei suoi consigli e dell'opera sua, non potè accorgersi del minimo cambiamento nel tenore abituale dell'indole sua. Egli parlava con lo stesso calore di prima delle cose scientifiche , e di ciò solo si lagnava che il viaggio inaspettato gli avesse impedito di proseguire una ricerca, intorno alla quale era allora fortemente occupato.

Ho già detto come in Jacobi si manifestasse il culto del pensiero, in occasione della grande scoperta di Abel. Simile disposizione egli mostrava per tuttociò che aveva importanza intellettuale ; onde a lui non va applicato quel detto di un antico scrittore, che gli uomini ammirino veramente quel solo che essi credono di poter fare. Al contrario Jacobi estendeva le manifestazioni della sua riconoscenza in tutto il giro del campo speculativo, e nella scienza stessa ch'ei professava i trovati altrui gli cagionavano letizia tanto maggiore qnanto più per la loro impronta distinguevansi dalle creazioni proprie di lui. Era in tal caso sua natural maniera di esprimere la propria approvazione, confessando che mai gli si sarebbe affacciato alla mente quel pensiero.

Mi resta adesso a completare qnello che ho menzionato di sopra sulle relazioni esteriori della vita di Jacobi.

Quando egli cominciò a far note le sue ricerche sulle funzioni ellittiche , era ancora professore particolare ; ma l'ammirazione che le sue scoperte risvegliarono nei giudici competenti, ebbe per conseguenza di portarlo ben tosto al grado di professore straordinario e poco appresso a quello di professore ordinario.

Nel parlare dell'accoglienza che le scoperte di Abel e di Jacobi - i cui nomi sono quì inseparabili - trovarono presso

tutti i matematici contemporanei, io non posso astenermi dal fare speciale ricordo dell'uomo, che per le meditazioni di molti anni, era giudice veramente autorevole a poter apprezzare l' inaspettato progresso in tutta la sua importanza. Legendre, che più di una volta accusò i suoi contemporanei d' indifferenza, e che poco innanzi aveva mosso lamento dell' abbandono in cui gli altri avevano lasciato la sua scienza favorita, credeva averla compiuta da se solo dopo quaranta anni di lavoro. Tuttavia egli applaudì alle scoperte di Abel e di Jacobi, che portavano quella teoria molto al di là dei limiti che a lui parevano posti dalla natura stessa del soggetto, in modo così sincero e così fervido, che è difficile a dire se tornasse più ad onore dei due giovani matematici ai quali veniva da lui tributato in sul principio della loro carriera, ovvero al nobile e vecchio maestro, che, giunto quasi all' estremo degli anni, mostravasi capace di tanto calore di sentimento.

Altro contrassegno non meno onorevole fu quello dell'Accademia di Parigi. Benchè ella non avesse aperto concorso alcuno sulla teoria delle funzioni ellittiche, tuttavia volle assegnare uno dei suoi grandi premi matematici ai lavori di Abel e di Jacobi, come alle più importanti scoperte del tempo; e lo divise fra Jacobi e gli eredi di Abel.

Quanto alle prove di ossequio e di stima che Jacobi si ebbe fin dall' entrare nella carriera scientifica, dirò solamente che i confini in cui debbo tenermi non mi permettono di accennare nemmeno tutte quelle che gli furon date più tardi in larga misura; non potendo la menzione di esse trovar luogo che soltanto in una ampia biografia.

Jacobi fece il suo primo viaggio nell'anno 1829 dopo aver pubblicate le sue « FUNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCT. ELLIPT. », che contengono solamente una parte delle sue ricerche sopra questo soggetto. Andò da prima a Gottinga per conoscere personalmente Gauss; di là mosse per Pa-

rigi, ove si trattenne parecchi mesi. Erano quivi riuniti in quel tempo, oltre Legendre (col quale Jacobi stava già da più anni in commercio epistolare, e pel quale aveva sempre sentito affetto grande), anche Fourier, Poisson ed altri matematici eminenti, sopravvissuti poscia all' uomo illustre di cui teniamo discorso.

Un secondo viaggio imprendeva Jacobi nel 1842 in compagnia di sua moglie, donna di merito eminente, alla quale erasi unito dopo il 1831. L'occasione di questo viaggio fu per lui troppo onorevole perchè io non potessi passarla sotto silenzio. All' illuminato uomo di Stato che allora presedeva l' amministrazione nella Provincia di Prussia, parve opportuno, nell'interesse della scienza, che Bessel e Jacobi si arrendessero finalmente all'invito già più volte replicato, di assistere al Congresso dei dotti, che ogni anno ha luogo in Inghilterra; onde egli ne fece pratica presso al Re, per ottenere l'approvazione delle spese di un tal viaggio; pratica che da S, M. con reale munificenza fu esaudita ed accordata.

Non guari dopo il suo ritorno da questo viaggio si mostrarono in Jacobi i sintomi di una malattia sventuratamente incurabile. Egli versò per lungo tempo in pericolo grande; e quando finalmente questo fu pel momento potuto allontanare, i suoi medici riconobbero che indispensabile alla sua salute fosse il soggiornare per qualche tempo sotto un clima meridionale. La qual circostanza inquietava non poco Jacobi. Ma questa sua inquietudine non fu di lunga durata; perocchè non sì tosto siffatta condizione di cose fu portata dal nostro Collega *Alessandro di Humboldt* (la cui potente mediazione non manca mai quando ne va dell'onore della scienza e del bene dei suoi cultori) a conoscenza del Re, già con un nuovo atto di reale magnanimità decretavasi a favore dell'illustre infermo una considerevole somma per un viaggio in Italia.

Il dolce clima di Roma, ove Jacobi passò l'inverno, fu così salutare sopra di lui, che a quanti quivi lo videro offrivasi in tutt'altro aspetto che da convalescente. Durante il suo soggiorno di 5 mesi in quella città, egli, oltre parecchie piccole Memorie, che comparvero in un giornale scientifico di Roma stessa, scrisse una importante e lunga Memoria pel Giornale di Crelle, e per di più attese ancora a fare il confronto dei manoscritti di *Diofante* conservati nel Vaticano dei quali egli si era trascorsivamente occupato tempo innanzi.

Ritornato in patria egli fu mandato ad insegnare da Koenisberg a Berlino, ove il clima, relativamente più dolce, sembrava minacciar meno la sua salute. Senza appartenere all'Università, egli aveva l'obbligo di fare delle lezioni, ma solo con quei riguardi che gli erano imposti dallo stato di sua salute. Nel tempo del suo soggiorno in questa città fu scrittore non meno operoso di quello ch'erasi mostrato in Koenisberg, come ne fanno testimonianza le Memorie scritte nei sei anni che vi rimase, le quali riempiono due grossi volumi in quarto.

Nel principio dell'anno 1851 fu attaccato da Grippe; dal quale risanato in breve, ritornò al lavoro con molta alacrità, talchè agli amici suoi venne meno la speranza di conservarlo a sè ed alla scienza. Infatti all' 11 Febbraio subitamente ammalò. Il suo stato risvegliò grandi apprensioni; e quando, dopo alcuni giorni, si riconobbe che egli era preso da vaiuolo, di natura assai maligna, ogni luce di speranza affatto si dileguò. Il 18 Febbraio, a 11 ore della sera, otto giorni dopo che si era ammalato, egli soccombette.

La carriera scientifica di Jacobi abbraccia precisamente un quarto di secolo; picciol tempo se si ragguaglia a quello dei matematici insigni a lui anteriori, e appena la metà di quello in cui si era spiegata l'attività di Eulero; col quale egli aveva la più grande somiglianza, non solo per la va-

rietà e la fecondità, come anche per la cognizione di tutti i mezzi della scienza, dei quali poteva giovarsi semprecchè il volesse.

La morte che lo strappò così precocemente e subitamente al lavoro, nel pieno vigore delle sue forze intellettuali, ha privato la scienza delle grandi ricchezze che ancora poteva aspettarsi dall'attività instancabile di lui. In ciò dire io non guardo solamente alla supposizione che in uno spirito di tal tempera avesse la forza creativa a venir meno insieme colla fisica; ma io guardo ancora a quella serie di lavori quasi finiti, ai quali egli stesso in breve tempo (forse durante la stampa, come ei faceva sì volentieri nell'ultimo periodo di sua vita) avrebbe potuto porre l'ultima mano, e che ora per opera dei suoi amici debbono venire alla luce a guisa di frammenti in forma imperfetta. Anche nel corso della sua malattia, quattro giorni prima di morire, lamentavasi dell'avversa fortuna che aveva contrariato molti dei suoi maggiori lavori, interrotti ora dalla malattia, ora da domestiche sventure. Quand'io, aggiungeva egli con dolore, mi faceva a ripigliare più tardi il lavoro, erami più gradevole applicarmi a qualche cosa di nuovo, che ritornare sopra quelle ricerche, che svegliavano in me sì triste rimembranze. Ma veggo che ormai non debbo più indugiare a rendere pubblici quei vecchi lavori ai quali ho consacrato sì gran parte delle mie forze migliori, dovendo essi entrare fruttuosi e fecondi nel corso della scienza. Fortunatamente mi fa mestieri per questo di breve tempo, che a me, come spero, non vorrà mancare.

SULLA QUADRATURA DELLA SUPERFICIE PARALLELA AD UNA SUPERFICIE DI QUART'ORDINE CONOSCIUTA SOTTO IL NOME DI SUPERFICIE DI ELASTICITA'

MEMORIA (*)

DI BARNABA TORTOLINI

1.° Sieno p, q i coefficienti differenziali di primo ordine della z nell'equazione di una superficie curva, e della forma

$$z = f(x, y)$$

Sia k la distanza costante della detta superficie con la corrispondente parallela, i valori delle coordinate X, Y, Z di un punto qualunque della nuova superficie relativamente ad un punto x, y, z della snperficie data, sono

$$X = x - \frac{pk}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$

$$Y = y - \frac{qk}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$

$$Z = z + \frac{k}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}.$$

Di più se alle derivate del primo ordine

$$p = \frac{dz}{dx},\ q = \frac{dz}{dy}$$

(*) Questa Memoria fu già da me presentata all'accademia de' nuovi Lincei fin dal 1852. Non essendo però questa, che un proseguimento di alcune ricerche da me intraprese sulle superficie parallele in due Memorie publicate nell'anno 1850 nel giornale Arcadico, e nel primo volume di questi Annali, si è creduto opportuno qui di inserirla, e publicarla. Si troverà di più notato qualche cosa sulla *Curvatura totale* di una superficie, e di cui ne feci già il soggetto di altra mia Memoria publicata nel 1851 nel tom. IV degli Atti de' nuovi Lincei.

si aggiungano quelle di second'ordine

$$r=\frac{d^2z}{dz^2},\ t=\frac{d^2z}{dy^2},\ s=\frac{d^2z}{dxdy},$$

e si ponga per brevità

$$Q=(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs$$

otterremo come già si è veduto in un' altra Memoria, per la quadratura S della superficie parallela

$$S=\iint dxdy\sqrt{(1+p^2+q^2)}-k\iint\frac{Qdxdy}{(1+p^2+q^2)}+k^2\iint\frac{(rt-s^2)dxdy)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

Questa formola è stata di già applicata all'ellissoide e dimostrai che la quadratura della superficie parallela all'ellissoide viene misurata dalla quadratura delle tre superficie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ =1,\ x^2+y^2+z^2=k^2.$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{2kbc}{a}\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{2kac}{b}\right)}+\frac{z^2}{\left(\frac{2kab}{c}\right)}=1$$

Richiamai poi secondo un'osservazione fatta da lungo tempo dal sig. Rodriguez, che l'integrale che serve di coefficiente a k^2 rappresenta la somma degli elementi della superficie divisi per il prodotto dei raggi di curvatura principale; il quale integrale per tutte le superficie chiuse, e di uniforme curvatura si riduce a 4π; l'integrale poi indipendente da k rappresenta sempre la quadratura della superficie primitiva. Facciamo adunque della precedente formola un'applicazione alla ricerca della superficie parallela alla *superficie di elasticità.*

2.° Projettando il centro dell'ellissoide di semiassi a, b, c su i piani tangenti, si ottiene per il luogo geometrico la superficie di quarto ordine

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\ .$$

In ottica rappresenta la superficie di elasticità. Poniamo per il raggio vettore r condotto dal centro della superficie al punto (x, y, z)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

come anche sostituiamo a, b, c invece di a^2, b^2, c^2, si avrà

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

Quindi per le derivate parziali p, q di primo ordine si trae

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{-x(a - 2r^2)}{z(c - 2r^2)}, \quad \frac{dz}{dy} = q = \frac{-y(b - 2r^2)}{z(c - 2r^2)}.$$

Per determinare le altre derivate parziali r, t, s osserviamo che per il raggio vettore r si ha

$$\frac{rdr}{dx} = x + pz, \quad \frac{rdr}{dy} = y + qz,$$

d'onde differenziando il valore di p, relativamente ad x, otteniamo dopo alcune riduzioni

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\left\{\frac{(c - 2r^2)(a - 2r^2)(z - px) - 4xz(c - a)(x + pz)}{z^2(c - 2r^2)}\right\}$$

ove sostituendo il valore di p, avremo

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4(c - a)^2x^2z^2 - [(c - 2r^2)(a - 2r^2)(y^2(2r^2 - b) - r^4)]}{z^3(c - 2r^2)^3}.$$

Infine ponendo per brevità

$$\text{H} = a - 2r^2, \quad \text{I} = b - 2r^2, \quad \text{K} = c - 2r^2$$

otteniamo per la derivata di second'ordine

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4(c - a)^2x^2z^2 + r^4\text{HK} + y^2\text{HIK}}{z^3\text{K}^3}.$$

Nello stesso modo si troverà per la derivata parziale di second' ordine relativamente ad y,

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{4(c - b)^2y^2z^2 + r^4\text{IK} + x^2\text{HIK}}{z^3\text{K}^3}$$

Si prenda ora il valore della derivata p, e si differenzi relativamente ad y, si otterrà facilmente

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{-4xz(a-c)(y+zq)+x(a-2r^2)(c-2r^2)q}{z^2(c-2r^2)^2}.$$

Se nel secondo membro si sostituisca il valore della derivata q, avremo in fine

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{-4xyz^2(a-c)(c-b)-xyHIK}{z^3K^3}.$$

Trovate le derivate di primo, e second' ordine della z, relativamente alle variabili x, y potremo formare i diversi composti di queste derivate e si avrà primitivamente

$$1+p^2+q^2=\frac{x^2H^2+y^2I^2+z^2K^2}{z^2K^2}$$

ovvero

$$1+p^2+q^2=\frac{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}{z^2K^2}.$$

Per calcolare gradatamente il valore di Q, scriviamo primieramente i prodotti

$$p^2\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{4(c-b)^2x^2y^2z^2H^2+r^4x^2IKH^2+x^4H^3IK}{z^5K^5}$$

$$q^2\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{4(c-a)^2x^2y^2z^2I^2+r^4y^2HKI^2+y^4HKI^3}{z^5K^5}.$$

$$2pq\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{-8x^2y^2z^2(a-c)(c-b)HI-2x^2y^2H^2I^2K}{z^5K^5}$$

e sommando si ottiene

$$p^2\frac{d^2z}{dx^2}+q^2\frac{d^2z}{dx^2}-2pq\frac{d^2z}{dxdy}=$$

$$\frac{4x^2y^2z^2[(c-b)H-(c-a)I]^2+HIK(Hx^2+Iy^2)(Hx^2+Iy^2+r^4)}{z^5K^5}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}$$

$$=\frac{4z^4K^2[(c-a)^2x^2+(c-b)^2y^2]+r^4z^2K^3(H+I)+HIK^3z^2(x^2+y^2)}{z^5K^5}.$$

Dalla somma di queste si ottiene il valore di Q, ed osserviamo che in forza dei valori di H, I, K ricaviamo facilmente

$$[(c-b)H-(c-a)I]^2=(a-b)^2K^2$$

$$r^4+Hx^2+Iy^2=-z^2(c-2r^2)=-z^2K$$

perciò

$$Q=\frac{4x^2y^2z^2(a-b)^2K^2-HIK^2z^2(Hx^2+Iy^2)+HIK^3z^2(x^2+y^2)+4K^2z^4[(c-a)^2x^2+(c-b)^2y^2]+r^4z^2K^3(H+I)}{z^5K^5}.$$

Questa espressione di Q può ridursi anche più semplice: infatti dal secondo, e terzo sistema di termini si trae

$$HIK^3z^2(x^2+y^2)-HIK^2z^2(Hx^2+Iy^2)=HIK^2z^2r^2(c-r^2).$$

Con questa sostituzione potrà togliersi il fattor commune z^2K^2, e si avrà

$$Q=\frac{4x^2y^2(a-b)^2+4x^2z^2(c-a)^2+4y^2z^2(c-b)^2+HIr^2(c-r^2)+r^4K(H+I)}{z^3K^3}.$$

Di più dal quarto, e quinto sistema di termini abbiamo

$$r^4H(K-I)=r^4H(c-b)$$

d'onde si trae

$$Q=\frac{4[(a-b)^2x^2y^2+(c-a)^2x^2z^2+(c-b)^2y^2z^2]+r^4(c-b)H+r^4KI+cr^2HI}{z^3K^3}.$$

Dalla nuova sostituzione di H, I, K ricaviamo ancora

$$r^4(c-b)H+r^4KI+cr^2HI=r^2[abc-(ab+ac+bc)r^2+4r^6]$$

come dai primi tre termini dello stesso valore di Q

$$(a-b)^2x^2y^2+(a-c)^2x^2z^2+(c-b)^2y^2z^2$$
$$=r^2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-(ax^2+by^2+cz^2)^2$$
$$=r^2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-r^6)$$

ed infine

$$Q=\frac{4r^2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)+r^2[abc-(ab+ac+bc)r^2]}{z^3K^3}.$$

Questa è la più semplice espressione che si possa ottenere del valore di Q. Nell'ipotesi di $a=b=c$ esso si riduce a quello di una sfera, cioè

$$Qz^3=-2a.$$

3.° Veniamo ora a calcolare l' espressione $rt-s^2$, che trovasi sotto il doppio integrale, e che serve di coefficiente a k^2 nel valore della quadratura S. Si riprenda la derivata di second' ordine

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4(c-a)^2x^2z^2+r^4HK+y^2HIK}{z^3K^3}$$

e separando negli ultimi due termini il fattor comune HK si sostituisca il valore di I, e di r^4, r^2 cioè

$$I=b-2r^2,\quad r^4=ax^2+by^2+cz^2,\quad r^2=x^2+y^2+z^2,$$

si troverà facilmente

$$r^4HK+y^2HIK=-HK(x^2H+z^2K)$$

d'onde

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4(c-a)^2x^2z^2-HK(x^2H+z^2K)}{z^3K^3}.$$

Nella stessa guisa per la derivata parziale relativamente ad y si ricava

$$\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{4(c-b)^2y^2z^2-IK(y^2I+z^2K)}{z^3K^3}.$$

Quindi dal loro prodotto avremo

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{\begin{array}{l}16(c-a)^2(c-b)^2x^2y^2z^4-4(c-b)^2x^2y^2z^2H^2K\\ -4(c-b)^2y^2z^4HK^2-4(c-a)^2x^2y^2z^2I^2K\\ -4(c-a)^2x^2z^4IK^2+HIK^2(x^2H+z^2K)(y^2I+z^2K)\end{array}}{z^6K^6}$$

Riassumiamo il valore della derivata $\frac{d^2z}{dxdy}$, ed elevandola al quadrato, si avrà

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$

$$=\frac{16(c-a)^2(c-b)^2x^2y^2z^4-8(c-a)(c-b)x^2y^2z^2HIK+x^2y^2H^2I^2K^2}{z^6K^6}$$

d'onde dalla sottrazione

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2=\frac{\begin{array}{l}-4Kx^2y^2z^2[H(c-b)-I(c-a)]^2\\ -4z^4K^2[(c-b)^2y^2H+(c-a)^2x^2I]\\ +HIK^2[(x^2H+z^2K)(y^2I+z^2K)-x^2y^2HI\end{array}}{z^6K^6}.$$

Il secondo membro è suscettivo di differenti riduzioni: infatti dai valori di H, I, K deduciamo

$$H(c-b)-I(c-a)=(a-b)(c-2r^2)=(a-b)K$$

$$(x^2H+z^2K)(y^2I+z^2K)-x^2y^2HI=z^2K[y^2(b-2r^2)$$
$$+x^2(a-2r^2)+z^2(c-2r^2)]$$

ossia

$$(x^2H+z^2K)(y^2I+z^2K)-x^2y^2HI=-z^2Kr^4\,.$$

Per mezzo di questi valori il secondo membro resta divisibile per z^2K^2, e perciò

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$

$$=\frac{-4[a-b)^2Kx^2y^2+(c-b)^2Hy^2z^2+(c-a)^2Ix^2z^2]-HIKr^4}{z^4K^4}.$$

Si sostituiscano nuovamente i valori di H, I, K, otterremo

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$

$$=\frac{\begin{array}{l}-4\{c(a-b)^2x^2y^2+a(c-b)^2y^2z^2+b(c-a)^2x^2z^2\\ -2r^2[(a-b)^2x^2y^2+(c-b)^2y^2z^2+(c-a)^2x^2z^2]\}\\ +r^4[8r^6-4(a+b+c)r^4+2(ab+ac+bc)r^2-abc]\end{array}}{z^4K^4}.$$

Ora nel primo sistema di termini indipendenti da r^2 si sviluppino i quadrati, e per i termini moltiplicati per $-2r^2$, abbiamo di sopra trovato

$$(a-b)^2x^2y^2+(a-c)^2x^2z^2+(b-c)^2y^2z^2$$

$$=r^2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-r^6)$$

e perciò avremo

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$

$$=\frac{\begin{array}{l}-4[acy^2(ax^2+cz^2)+bcx^2(by^2+cz^2)+abcz^2(ax^2+by^2)\\ -2abc(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-2r^4(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-r^6)]\\ +r^4[8r^6-4(a+b+c)r^4+2r^2(ab+ac+bc)-abc]\end{array}}{z^4K^4}.$$

Dall'equazione della superficie abbiamo i valori

$$ax^2+cz^2=r^4-by^2,\quad by^2+cz^2=r^4-ax^2,\quad ax^2+by^2=r^4-cz^2$$

ed osserviamo che i due termini con la potenza decima di r si distruggono, e potremo scrivere per la sostituzione dei riportati valori

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$

$$=\frac{\begin{array}{l}4r^4[2a^2x^2+2b^2y^2+2c^2z^2-bcx^2-acy^2-abz^2\\ -r^4(a+b+c)]-4abc(x^2+y^2+z^2)^2+2r^6(ab+ac+bc)-abcr^4\end{array}}{z^4K^4}.$$

Facciamo ora nel coefficiente r^4 di $a+b+c$, e nel coefficiente di $-4abc$ le sostituzioni

$$r^4 = ax^2 + by^2 + cz^2 \quad , \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

si troverà in fine

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$
$$= \frac{r^4[4(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - 2(ab + ac + bc)r^2 + 3abc]}{z^4K^4} .$$

Nell'ipotesi di $a = b = c = r^2$ si ha come è noto il corrispondente valore per la sfera.

4.° Calcolati i diversi composti delle derivate di primo, e second'ordine ne dobbiamo fare la sostituzione nell'espressione generale della quadratura S riportata al paragrafo 2.° Osserviamo primieramente che il valore di Q essendo positivo, converrà prendere con il segno contrario l'integrale che serve di coefficiente a k, onde la nuova superficie parallela sia una delle esterne alla data di *elasticità*. Ciò posto ricordandoci che il primo degli integrali componenti il valore di S rappresenta la quadratura S_1 della superficie primitiva, è chiaro, che ponendo

$$d^2S_1 = dxdy\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$$

otterremo

$$S = S_1 + k\iint \frac{Qd^2S_1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$
$$+ k^2 \iint \frac{\left[\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right] d^2S_1}{(1+p^2+q^2)^2} .$$

Volendo applicare questa formola alla superficie S_1 di *elasticità*, si rifletta che posto

$$M^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

si ha

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{M^2}{z^2 K^2}$$

quindi

$$\frac{Q}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)^3}} = \frac{4r^2M^2 + r^2[abc - (ab + ac + bc)r^2]}{M^3}$$

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{r^4[4M^2 - 2(ab + ac + bc)r^2 + 3abc]}{M^4}$$

Per le integrazioni convien far uso delle coordinate polari, in modo da porre

$$x = r\cos\varphi\ ,\quad y = r\,\text{sen}\varphi\cos\theta\ ,\quad z = r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta$$

ed allora ponendo per brevità

$$u = \cos\varphi\ ,\quad v = \text{sen}\varphi\cos\theta\ ,\quad w = \text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta$$

$$P^2 = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2$$

si ha

$$M^2 = r^2(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2) = r^2P^2\ .$$

Per la medesima sostituzione polare, l'equazione della superficie

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2 + by^2 + cz^2$$

diviene

$$r^2 = au^2 + bv^2 + cw^2$$

e come ho provato in altre Memorie la sua quadratura dipende dall'integrale

$$S_1 = \iint \text{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta \sqrt{(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2)} = \iint P\,\text{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

Di qui si trae

$$\iint \frac{Q\, d^2 S_1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} = \iint \frac{[4r^2P^2 + abc - (ab + ac + bc)r^2]\,\text{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta}{r\,P^2}$$

$$\iint \frac{\left[\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right]d^2S_1}{(1+p^2+q^2)^2}$$

$$=\iint \frac{[4\,r^2\,P^2-2\,(ab+ac+bc)\,r^2+3abc]\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\theta}{P^3}.$$

L'ultimo di questi due integrali esteso all'intera superficie si dovrà ridurre a 4π; ed il primo dipenderà dalle funzioni ellittiche delle tre note specie.

5.° Integriamo pertanto fra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, $\theta=0$, $\theta=\frac{1}{2}\pi$ e poniamo per brevità

$$S_2=8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{Q\,d^2S_1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

$$S_3=8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\left[\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right]d^2S_1}{(1+p^2+q2)^3}$$

avremo per la superficie S_1 paralella alla superficie S di elasticità

$$S=S_1+k\,S_2+k^2\,S_3$$

ove come già è noto si hà

$$S_1=8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen}\varphi d\varphi d\theta\sqrt{(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)}.$$

Per calcolare adunque nel nostro caso gli integrali denotati con S_2, S_3 sostituiamo nel secondo memdro i valori di r, P, otteremo per il primo

$$S_2=32\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen}\varphi d\varphi d\theta\sqrt{(au^2+bv^2+cw^2)}$$

$$+8abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\theta}{(au^2+bv^2+cw^2)^{\frac{1}{2}}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)}$$

$$-8(ab+ac+bc)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen}\varphi d\varphi d\theta\sqrt{(au^2+bv^2+cw^2)}}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}.$$

I nuovi integrali si potranno rendere di forma razionale per mezzo di alcune trasformazioni di variabili, come già ho mostrato in altre circostanze: intanto osserviamo che il primo integrale rappresenterà il quadruplo della quadratura di una superficie di elasticità della quale i valori numerici degli assi sieno $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$., o ciò che torna lo stesso il quadruplo di una superficie ellissoidica di semiassi

$$\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\,,\ \sqrt[4]{\frac{ac}{b}}\,,\ \sqrt[4]{\frac{be}{a}}$$

e sarà sempre esprimibile da' trascendenti ellittici di prima, e seconda specie, in modo che supponendo $a < b < c$, e facendo inoltre

$$\cos\mu = \frac{a}{c}\,,\quad h^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}\,,$$

si ha per la quadratura S_1 della superficie di elasticità

$$S_1 = \frac{2\pi ab}{c} + \frac{2\pi c^2}{\sqrt{(c^2 - a^2)}}\,[\cos^2\mu\, F(h, \mu) + \operatorname{sen}^2\mu\, E(h, \mu)]$$

ove nel secondo membro per le funzioni ellittiche di prima, e seconda specie abbiamo

$$F(h, \mu) = \int_0^{\mu} \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - h^2 \operatorname{sen}^2\omega)}}\,,\ E(h, \mu) = \int_0^{\mu} d\omega \sqrt{(1 - h^2 \operatorname{sen}^2\omega)}\,.$$

Nella stessa guisa ponendo

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\,,\quad h_1^2 = \frac{c - b}{c - a}$$

otteniamo per l' integrale T rappresentato dal primo termine del valore di S_2

$$T = 32 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta \sqrt{(au^2 + bv^2 + cw^2)}$$

ossia

$$T = \frac{8\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{c}} + \frac{8\pi c}{\sqrt{(c-a)}}\left[\cos^2\lambda\, F(h_1, \lambda) + \text{sen}^2\lambda\, E(h_1, \lambda)\right].$$

Fra le ampiezze μ, λ, ed i moduli h, h_1 sussistono evidentemente le relazioni

$$\cos^2\lambda = \cos\mu\,,\quad h^2 = \frac{h_1^{\,2}(c+b)}{(c+a)}$$

ovvero

$$1 - \cos^2\lambda = 1 - \cos\mu = 2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\mu$$

e

$$\text{sen}\lambda = \text{sen}\tfrac{1}{2}\mu\sqrt{2}\,,\quad h_1^{\,2} = \frac{h^2 c(1+\cos\mu)}{c+b}$$

ed infine ponendo ancora $b = c\cos\nu$

$$\lambda = \text{arc.sen.}(\text{sen}\tfrac{1}{2}\mu\sqrt{2})$$

$$h_1^{\,2} = \frac{h^2\cos^2\frac{1}{2}\mu}{\cos^2\frac{1}{2}\nu}\,,\quad h_1 = \frac{h\cos\frac{1}{2}\mu}{\cos\frac{1}{2}\nu}\,.$$

Ritenuto ora il significato delle quantità r, u, v, w pongasi

$$\xi = \cos\psi\,,\quad \eta = \text{sen}\psi\cos\omega\,,\quad \zeta = \text{sen}\psi\,\text{sen}\omega$$

e trasformiamo le coordinate sferiche u, v, w in altre ξ, η, ζ della stessa specie, col fare

$$u = \frac{\xi}{\sqrt{a}.\rho}\,,\quad v = \frac{\eta}{\sqrt{b}.\rho}\,,\quad w = \frac{\zeta}{\sqrt{c}.\rho}$$

ove

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c}\right)} = \frac{1}{\sqrt{(au^2 + bv^2 + cw^2)}}$$

si avrà

$$d\theta = \frac{\sqrt{bc}.d\omega}{b\,\text{sen}^2\omega + c\cos^2\omega}\,,\quad a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = \frac{a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2}{\rho^2}\,.$$

Facendo tutte queste sostituzioni nel secondo membro della S_2 ricaviamo

$$S_2 = T + 8\sqrt{(abc)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\text{sen}\psi d\psi d\omega}{(a\cos^2\psi + b\,\text{sen}^2\psi\cos^2\omega + c\,\text{sen}^2\psi\,\text{sen}^2\omega)}$$

$$- 8(ab+ac+bc)\sqrt{(abc)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\text{sen}\psi d\psi d\omega}{H,L}$$

ove per brevità

$$H = bc\cos^2\psi + ac\,\text{sen}^2\psi\cos^2\omega + ab\,\text{sen}^2\psi\,\text{sen}^2\omega$$

$$L = a\cos^2\psi + b\,\text{sen}^2\psi\cos^2\omega + c\,\text{sen}^2\psi\,\text{sen}^2\omega\ .$$

I nuovi integrali componenti il valore di S_2 ridotti alla forma razionale, facilmente potranno esprimersi in trascendenti ellittici.

6°. Sia

$$\alpha^2 = a\cos^2\psi + b\,\text{sen}^2\psi\ ,\ \beta^2 = a\cos^2\psi + c\,\text{sen}^2\psi$$

$$\alpha_1{}^2 = c(b\cos^2\psi + a\,\text{sen}^2\psi)\ ,\ \beta_1{}^2 = b(c\cos^2\psi + a\,\text{sen}^2\psi)$$

$$A = ab+ac+bc$$

ed osserviamo che dal primo degli integrali si hà

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\alpha^2{}_1\cos^2\omega + \beta^2\text{sen}^2\omega} = \frac{\pi}{2\ \alpha\ \beta}$$

avremo

$$S_2 = T + \frac{8\pi\sqrt{(abc)}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen}\,\psi\,d\,\psi}{\sqrt{(a\cos^2\psi + b\,\text{sen}^2\psi)}.\sqrt{(a\cos^2\psi + c\,\text{sen}^2\psi)}}$$

$$- 8\,A\sqrt{abc}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\text{sen}\psi d\psi d\omega}{(\alpha^2{}_1\cos^2\omega + \beta_1{}^2\text{sen}^2\omega)(\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\text{sen}^2\omega)}\ .$$

Avanti di eseguire nel secondo degli integrali, l' integrazione relativamente ad ω, conviene decomporre la frazione composta nelle due frazioni semplici, e perciò se si sostituisca $\cos^2\omega = 1 - \text{sen}^2\omega$, faremo

$$\frac{1}{[\alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2)\text{sen}^2\omega][\alpha_1{}^2 + (\beta_1{}^2 - \alpha_1{}^2)\text{sen}^2\omega]}$$

$$=\frac{M}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)\operatorname{sen}^2\omega}+\frac{N}{\alpha_1^2+(\beta_1^2-\alpha_1^2)\operatorname{sen}^2\omega}$$

d'onde le due equazioni

$$M\alpha_1^2+N\alpha^2=1\ ,\ M(\beta_1^2-\alpha_1^2)+N(\beta^2-\alpha^2)=0\ .$$

Di qui si trae

$$M=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha_1^2\beta^2-\alpha^2\beta_1^2}\ ,\ N=-\frac{(\beta_1^2-\alpha_1^2)}{\alpha_1^2\beta^2-\alpha^2\beta_1^2}$$

d'onde

$$S_2=T+\frac{8\pi\sqrt{(abc)}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}\psi d\psi}{\alpha\beta}$$

$$-8A\sqrt{abc}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha_1^2\beta^2-\alpha^2\beta_1^2)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\psi d\psi d\omega}{(\alpha_1^2\cos^2\omega+\beta_1^2\operatorname{sen}^2\omega)}\right.$$

$$\left.-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\beta_1^2-\alpha_1^2)}{(\alpha_1^2\beta^2-\alpha^2\beta_1^2)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\psi d\psi d\omega}{(\alpha_1^2\cos^2\omega+\beta_1^2\operatorname{sen}^2\omega)}\right].$$

Ed integrando relativamente ad ω, abbiamo

$$S_2=T+\frac{8\pi\sqrt{abc}}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen}\psi d\psi}{\alpha\beta}$$

$$-8\pi\frac{(ab+ac+bc)\sqrt{(abc)}}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\beta^2-\alpha^2)\operatorname{sen}\psi d\psi}{\alpha\beta(\alpha_1^2\beta^2-\alpha^2\beta_1^2)}\right.$$

$$\left.-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\beta_1^2-\alpha^2{}_1)\operatorname{sen}\psi d\psi}{\alpha_1\beta_1(\alpha_1^2\beta^2-\alpha^2\beta_1^2)}\right].$$

Calcoliamo i composti da α, β, α_1, β_1 espressi per l'angolo ψ avremo

$$\beta^2-\alpha^2=(c-b)\operatorname{sen}^2\psi\ ,\ \beta_1^2-\alpha_1^2=-a(c-b)\operatorname{sen}^2\psi$$

$$\alpha_1^2\beta^2-\alpha^2\beta_1^2=(c-b)\operatorname{sen}^2\psi(a\beta^2+\beta_1^2)$$

$$=(c-b)[a(c+b)+(c-a)(b-a)\cos^2\psi]\operatorname{sen}^2\psi\ .$$

Sostituendo verrà

$$S_2 = T + 8\pi \frac{\sqrt{(abc)}}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{sen}\psi d\psi}{\alpha\beta} - 8\pi \frac{(ab+ac+bc)\sqrt{(abc)}}{2} (U-V)$$

ove per brevità

$$U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{sen}\psi d\psi}{[a(c+b)+(c-a)(b-a)\cos^2\psi]\alpha\beta}$$

$$V = -a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{sen}\psi d\psi}{[a(c+b)+(c-a)(b-a)\cos^2\psi]\alpha_1\beta_1}.$$

Riprendiamo i valori di α, β, cioè

$$\alpha = \sqrt{(a\cos^2\psi + b\,\text{sen}^2\psi)}\ ,\quad \beta = \sqrt{(a\cos^2\psi + c\,\text{sen}^2\psi)}$$

e poniamo in esse come sopra

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}},\quad \cos\psi = \frac{\sqrt{c}\,\text{sen}t}{\sqrt{(c-a)}} = \frac{\text{sen}t}{\text{sen}\lambda},\quad l^2 = \frac{c(b-a)}{b(c-a)}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{b(c-a)}} \int_0^{\lambda} \frac{dt}{[a(c+b)+c(b-a)\text{sen}^2t]\sqrt{(1-l^2\text{sen}^2t)}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\psi d\psi}{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{b(c-a)}} \int_0^{\lambda} \frac{dt}{\sqrt{(1-l^2\text{sen}^2t)}}$$

e ponendo per la consueta notazione delle funzioni ellittiche di terza specie

$$n_1 = \frac{c(b-a)}{a(c+b)},$$

$$\Pi(\lambda, n_1, l) = \int_0^{\lambda} \frac{dt}{(1+n_1\,\text{sen}^2t)\sqrt{(1-l^2\text{sen}^2t)}}$$

il valore di U diviene

$$U = \frac{1}{a(c+b)\sqrt{b(c-a)}} \Pi(\lambda, n_1, l)$$

ed insieme

$$\int_0^{\pi\frac{1}{2}} \frac{\text{sen}\psi d\psi}{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{b(c-a)}} F(\lambda, l).$$

Per l'integrale espresso da V riteniamo il valore di $\cos\lambda$, e poniamo come sopra

$$h_1^2 = \frac{c-b}{c-a},$$

ma sia la sostituzione

$$\cos\psi = \cot\lambda \operatorname{tang} t\ ,\ \operatorname{sen}\psi d\psi = -\frac{\cot\lambda dt}{\cos^2 t}$$

allora ai limiti $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$ corrisponderanno $t=0$, $t=\lambda$ d' onde rovesciando i limiti col cangiamento di segno ed avvertendo che

$$\operatorname{sen}\lambda = \frac{\sqrt{(c-a)}}{\sqrt{c}},\quad \cot^2\lambda = \frac{a}{c-a}$$

otterremo

$$V = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{bc}.\sqrt{(c-a)}}\int_0^\lambda \frac{\cos t^2 dt}{[c+b-(c+a)\operatorname{sen}^2 t]\sqrt{(1-h_1^2\operatorname{sen}^2 t)}}$$

Infine sostituendo $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$, ed eseguendo la divisione nella parte razionale dell'integrale si deduce

$$V = -\frac{(a-b)}{(c+a)\sqrt{(abc)}\sqrt{(c-a)}}\int_0^\lambda \frac{dt}{[c+b-(c+a)\operatorname{sen}^2 t]\sqrt{(1-h_1^2\operatorname{sen}^2 t)}}$$

$$-\frac{1}{(c+a)\sqrt{(abc)}\sqrt{(c-a)}}\int_0^\lambda \frac{dt}{\sqrt{(1-h_1^2\operatorname{sen}^2 t)}}$$

ponendo poi per il parametro n della funzione ellittica di terza specie

$$n = -\frac{(c+a)}{c+b},$$

si otterrà come sopra

$$V = \frac{b-a}{(c+a)(c+b)\sqrt{(abc)}.\sqrt{(c-a)}}\Pi(n, h_1, \lambda)$$

$$-\frac{1}{(c+a)\sqrt{(abc)}.\sqrt{(c-a)}}F(h_1, \lambda)$$

Avremo dunque da queste sostituzioni, e dal valore di T

$$S_2 = + \frac{8\pi\sqrt{(abc)}}{2\sqrt{b(c-a)}} F(l, \lambda)$$

$$- \frac{8\pi\sqrt{abc}}{2} \frac{(ab + ac + bc)}{a(c+b)\sqrt{b(c-a)}} . \Pi(n_1, l, \lambda)$$

$$+ \frac{8\pi\sqrt{abc}}{2} \frac{(ab + ac + bc)(b-a)}{(c+a)(c+b)\sqrt{abc}.\sqrt{(c-a)}} \Pi(n, h_1, \lambda)$$

$$- \frac{8\pi\sqrt{abc}}{2} \frac{(ab + ac + bc)}{(c+a)\sqrt{abc}\sqrt{(c-a)}} F(h_1, \lambda)$$

$$+ \frac{8\pi\sqrt{ab}}{2\sqrt{c}} + \frac{8\pi c}{2\sqrt{(c-a)}} [\cos^2\lambda F(h_1, \lambda) + \text{sen}^2\lambda E(h_1, \lambda)]$$

ed ognun vede che sotto la stessa ampiezza λ il valore di S_2 si esprime per le funzioni ellittiche delle tre note specie di parametri e moduli diversi. Per il medesimo valore si potrà scrivere

$$S_2 = \frac{4\pi\sqrt{ac}}{a(c+b)\sqrt{(c-a)}} [a(c+b)F(l, \lambda) - (ab+ac+bc)\Pi(n_1, l, \lambda)]$$

$$- \frac{4\pi}{(c+b)} \frac{(ab+ac+bc)}{(c+a)\sqrt{(c-a)}} [(b+c)F(h_1, \lambda) - (b-a)\Pi(n, h_1, \lambda)]$$

$$+ \frac{4\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{c}} + \frac{4\pi c}{\sqrt{(c-a}} [\cos^2\lambda F(h_1, \lambda) + \text{sen}^2\lambda E(h_1, \lambda] .$$

Determinato il valore di S_2 e quello di S_1 come dal parag. 5.° resta a conoscersi il valore di S_3 onde poter sostituire il tutto nell' espressione riportata allo stesso parag. 5° cioè

$$S = S_1 + k\ S_2 + k^2\ S_3$$

Ora S_3 si riduce a 4π, mentre tale è il valore per tutte le superficie chiuse, e di uniforme curvatura per la somma degli elementi della superficie divisi per il prodotto dei

raggi di curvatura principale: contuttociò in appresso faremo conoscere l'analisi per la verificazione di questa somma nella superficie di elasticità: intanto sostituiamo nuovamente a^2, b^2, c^2 invece di a, b, c, ed osserviamo che il valore di S_1 diverrà

$$S_1 = \frac{2\pi a^2 b^2}{c^2} + \frac{2\pi c^4}{\sqrt{(c^4 - a^4)}} [\cos^2\mu F(h, \mu) + \text{sen}^2\mu\, E(h, \mu)]$$

ove l' ampiezza μ, ed il modulo h sono determinati dall'equazioni

$$\cos\mu = \frac{a^2}{c^2}, \quad h^2 = \frac{c^4 - b^4}{c^4 - a^4}.$$

Ciò posto S_1 rappresenterà la superficie di elasticità che si riduce ad un'altra ellissoide, e per la quadratura della superficie S parallela a quella di elasticità avremo

$$S = \frac{2\pi a^2 b^2}{c^2} + \frac{2\pi c^4}{\sqrt{(c^4 - a^4)}} [\cos^2\mu\, F(h, \mu) + \text{sen}^2\mu\, E(h, \mu)]$$

$$+ \frac{4\pi c k}{a(c^2+b^2)\sqrt{(c^2-a^2)}} [a^2(c^2+b^2)F(l,\lambda) - (a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\Pi(n_1,l,\lambda)]$$

$$- \frac{4\pi k(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)\sqrt{(c^2-a^2)}} [(b^2+c^2)F(h_1,\lambda) - (b^2-a^2)\Pi(n,h,\lambda)]$$

$$+ \frac{8\pi abk}{c} + \frac{8\pi c^2 k}{\sqrt{(c^2-a^2)}} [\cos^2\lambda F(h_1, \lambda) + \text{sen}^2\lambda E(h_1, \lambda)] + 4\pi k^2.$$

Da questa espressione si trae che la quadratura della superficie parallela alla superficie di elasticità si compone di due superficie di elasticità di differenti assi, di una sfera, e di un'altra superficie dipendente dai trascendenti ellittici di terza specie e che probabilmente potrebbe farsi dipendere da due superficie coniche di secondo grado. Resta ora ad esporsi la lunga analisi dalla quale sia verificato che l'integrale rappresentato da S_3 si riduca a 4π.

7.° Si riprenda il doppio valore di S_3 con il quale termina il parag. 4°, ed incomincia il 5°, e per la sostituzione dei valori di r, P, col ritenere a, b, c invece di a^2, b^2, c^2 si avrà

$$S_3 = 32\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(au^2+bv^2+cw^2)\text{sen}\varphi d\varphi d\theta}{\sqrt{(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)}}$$

$$-16(ab+ac+bc)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(au^2+bv^2+cw^2)\text{sen}\varphi d\varphi d\theta}{\sqrt{(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)^3}}$$

$$+24abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\text{sen}\varphi d\varphi d\theta}{\sqrt{(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)^3}}.$$

Fissi i valori di u, v, w poniamo per una prima integrazione relativamente a, φ,

$$A = b^2\cos^2\theta + c^2\text{sen}^2\theta\ ,\quad B = a^2 - (b^2\cos^2\theta + c^2\text{sen}^2\theta)$$

$$A_1 = b\cos^2\theta + c\,\text{sen}^2\theta\ ,\quad B_1 = a - (b\cos^2\theta + c\,\text{sen}^2\theta)$$

$$\cos\varphi = x\ ,\quad -\text{sen}\varphi\, d\varphi = dx$$

i limiti diverranno $x=1$, $x=0$, e perciò cangiando il segno, e rovesciando i limiti, e ponendo per brevità

$$X = \sqrt{(A + Bx^2)}$$

avremo

$$S_3 = 32\int_0^{\frac{1}{2}\pi}A_1 d\theta\int_0^1\frac{dx}{X} + 32\int_0^{\frac{1}{2}\pi}B_1 d\omega\int_0^1\frac{x^2dx}{X}$$

$$-16(ab+ac+bc)\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}A_1 d\omega\int_0^1\frac{dx}{X^3} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi}B_1 d\omega\int_0^1\frac{x^2dx}{X^3}\right]$$

$$+24\,abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\text{sen}\varphi d\varphi d\theta}{\sqrt{(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)^3}}$$

Dalle integrazioni indefinite abbiamo

$$\int\frac{x^2dx}{X} = \frac{xX}{2B} - \frac{A}{2B}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{AX} = \frac{x}{A\sqrt{(A+Bx^2)}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{X^3} = -\frac{x}{BX} + \frac{1}{B}\int \frac{dx}{X}.$$

Sia

$$U = \int_0^1 \frac{dx}{X} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(A+Bx^2)}}\text{, sarà}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(A+Bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{B}} \log[x\sqrt{B}+\sqrt{(A+Bx^2)}]$$

quindi ai limiti

$$U = \int_0^1 \frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{B}} \log\left(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{(A+B)}}{\sqrt{A}}\right).$$

Osservando poi che per i valori di A, B si ha $A+B=a^2$, e che per l' ultimo integrale componente il valore di S_3 risulta

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi d\varphi d\theta}{\sqrt{(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)^3}} = \frac{\pi}{2abc}$$

otterremo

$$S_3 = 32\int_0^{\frac{1}{2}\pi} A_1 U d\theta + 16a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B}\,d\theta - 16\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{AB_1}{B}\,Ud\theta$$

$$-\frac{16(ab+ac+bc)}{a}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_1}{A}\,d\theta - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B}\,d\theta\right)$$

$$-16(ab+ac+bc)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B}\,Ud\theta + \frac{24\pi}{2}.$$

Integriamo primieramente i differenziali algebrici, e si avrà dalla divisione

$$\frac{B_1}{B} = \frac{1}{b+c} + \frac{(a-c)(b-a)}{(b+c)[(b^2-c^2)\operatorname{sen}^2\theta+a^2-b^2]}$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{b+c} - \frac{bc}{(b+c)[(b^2-c^2)\text{sen}^2\theta - b^2]}$$

quindi moltiplicando per $d\theta$, ed osservando che

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{(a^2-b^2)\cos^2\theta + (a^2-c^2)\text{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{(a^2-b^2)}\sqrt{(a^2-c^2)}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + c^2\text{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2bc}$$

si otterrà

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{b+c} - \frac{\sqrt{(a-c)}\sqrt{(a-b)}}{(b+c)\sqrt{(a+c)}\sqrt{(a+b)}}\right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_1}{A}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+c}\right)$$

e perciò

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_1}{A}\, d\theta - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{\sqrt{(a-c)}\sqrt{(a-b)}}{(b+c)\sqrt{(a+b)}.\sqrt{(a+c)}}\right).$$

Sostituiti questi valori nel secondo membro di S_3 e riducendo si trova

$$S_3 = 32\int_0^{\frac{1}{2}\pi} A_1 U d\theta - 16\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{AB_1}{B} U d\theta - 16(ab+ac+bc)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B} U d\theta$$

$$+ \frac{24\pi}{2} + 8\pi\, \frac{[a(a-b)-c(a+b)]}{a(b+c)} - \frac{8\pi\sqrt{(a^2-c^2)}\sqrt{(a^2-b^2)}}{a(b+c)}$$

Resta ancora la determinazione degli altri integrali che dipendono dalle funzioni ellittiche.

8.° Sia $a > b$, $a > c$, e $b < c$, e prendiamo due quantità λ^2, λ'^2, che sia $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$, cioè poniamo

$$\lambda^2 = \frac{c^2-b^2}{a^2-b^2},\ \lambda'^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2-b^2},\ \Delta = \sqrt{(1-\lambda^2\text{sen}^2\theta)}$$

sarà

$$B = (a^2-b^2)\Delta^2,\ A + B = a^2$$

$$A = a^2 - (a^2 - b^2)\Delta^2 = [a - \sqrt{(a^2-b^2)}.\Delta][a + \sqrt{(a^2-b^2)}.\Delta]$$

d'onde prendendo $\sqrt{(a^2-b^2)} = ma$, verrà per il valore di U del precedente paragrafo.

$$U = \frac{1}{\sqrt{B}} \log\left(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{(A+B)}}{\sqrt{A}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{(a^2-b^2)}.\Delta} \log\left(\frac{1+m\Delta}{1-m\Delta}\right)$$

Ciò posto richiamiamo i valori di A, A_1, B, cioè

$$A = b^2 - (b^2-c^2)\text{sen}^2\theta\ ,\ A_1 = b - (b-c)\text{sen}^2\theta$$

$$B_1 = (a-b) - (b-c)\text{sen}^2\theta$$

e poniamo in generale

$$U_{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{sen}^{2n}\theta}{\Delta} \log\left(\frac{1+m\Delta}{1-m\Delta}\right) d\theta$$

$$V_{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{sen}^{2n}\theta}{\Delta^3} \log\left(\frac{1+m\Delta}{1-m\Delta}\right) d\theta$$

otterremo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} A_1 U d\theta = \frac{b}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} U_0 - \frac{(b-c)U_2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{AB_1}{B} d\theta = \frac{b^2}{2(a+b)\sqrt{(a^2-b^2)}} V_0$$

$$+ (b-c)\left(\frac{b^2-(a-b)(b+c)}{2\sqrt{(a-b)^3}}\right) V_2 - \frac{(b-c)(b^2-c^2)}{2\sqrt{(a^2-b^2)^3}} V_4$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B} U d\theta = \frac{1}{2(a+b)\sqrt{(a^2-b^2)}} V_0 + \frac{b-c}{2\sqrt{(a^2-b^2)^3}} V_2\ .$$

Se quest'ultimo integrale si moltiplichi per $ab + ac + bc$, e si sommi con il secondo verrà

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{AB_1}{B} U d\theta + (ab+ac+bc) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B} U d\theta$$

$$= \frac{b+c}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} V_0 + \frac{2b(b^2-c^2)}{2\sqrt{(a^2-b^2)^3}} V_2 - \frac{(b-c)(b^2-c^2)}{2\sqrt{(a^2-b^2)^3}} V_4\ .$$

Gli integrali della forma V_{2n} si potranno ridurre agli integrali U_{2n}, e V_0: infatti sostituendoci nei primi l' identità

$$\Delta^3 = \Delta^2 . \Delta = (1 - \lambda^2 \mathrm{sen}^2\theta)\Delta$$

ed eseguendo la divisione, si avrà

$$U_2 = -\frac{(a^2-b^2)}{c^2-b^2}(U_0 - V_0)$$

$$V_4 = -\frac{(a^2-b^2)}{c^2-b^2}U_2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{(c^2-b^2)^2}U_0 + \frac{(a^2-b^2)^2}{(c^2-b^2)^2}V_0 .$$

Sostituendo questi valori nell' ultimo degli integrali ricaviamo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{AB_1}{B} Ud\theta + (ab + ac + bc)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B} Ud\theta$$

$$= \frac{(c^2-a^2)}{2(b+c)\sqrt{(a^2-b^2)}} V_0 + \frac{(b^2+2bc+a^2)}{2(b+c)\sqrt{(a^2-b^2)}} U_0 + \frac{(c-b)}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} U_2$$

Moltiplicando per 16 il primo, e secondo membro e sottraendolo da $32\int_0^{\frac{1}{2}\pi} A_1 U d\theta$ si trova

$$32\int_0^{\frac{1}{2}\pi} A_1 Ud\theta - 16\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{AB_1}{B} Ud\theta - 16(ab+ac+bc)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B_1}{B} Ud\theta$$

$$= \frac{8(c-b)}{\sqrt{(a^2-b^2)}} U_2 - \frac{8(a^2-b^2)}{(b+c)\sqrt{(a^2-b^2)}} U_0 - \frac{8(c^2-a^2)}{(c+b)\sqrt{(a^2-b^2)}} V_0 .$$

Ma come ho dimostrato in altra Memoria pubblicata nel giornale arcadico pel settembre 1848, gli integrali della forma U_{2n}, V_{2n} si riducono ai trascendenti ellittici di prima, e seconda specie, e precisamente nei parag. 8° e 10° sono riportati i valori di U_0, U_2, V_0, ed in quelle formole basterà introdurre λ' invece di k', e sostituire un'ampiezza ε invece di θ col fare

$$\operatorname{sen}\varepsilon = m = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$$

ed avremo dagli indicati paragrafi

$$U_0 = \pi F(\lambda', \varepsilon),\ U_2 = \frac{\pi(a^2-b^2)}{a^2-c^2} E(\lambda', \varepsilon) - \frac{\pi(a^2-bc)\sqrt{(a^2-b^2)}}{a(c^2-b^2)} .$$

$$V_0 = \frac{\pi(a^2-b^2)}{a\sqrt{(a^2-c^2)}} + \frac{\pi(a^2-b^2)}{a^2-c^2} [F(\lambda',\varepsilon) - E(\lambda',\varepsilon)]$$

Rappresentando adunque per M il valore del primo membro della data ultima equazione, e sostituendoci i valori di U_{02} U_2, V_0; resteranno le sole quantità algebriche, e sarà

$$M = -\frac{8\pi(a^2-bc)}{a(b+c)} + \frac{8\pi\sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-c^2)}}{a(b+c)}$$

Riprendiamo con questi valori l'espressione S_3 e verrà

$$S_3 = M + \frac{24\pi}{2} + 8\pi\left(\frac{a(a-b)-c(a+b)}{a(b+c)}\right) - \frac{8\pi\sqrt{(a^2-c^2)}\sqrt{(a^2-b^2)}}{a(b+c)} .$$

Infine sostituendoci il valore di M, si ottiene

$$S_3 = 4\pi$$

É dunque verificato che nella superficie di elasticità la *curvatura totale* coincide con la sfera di raggio 1.

LETTRE DE M.r J. J. SYLVESTER PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES A LA ROYAL MILITAIRE ACADÉMIE DE WOOLWICH A LE REDACTEUR.

Mon cher Monsieur

J' ai l' honneur de vous envoyer pour être inséré dans votre journal estimable, si vous les en jugés dignes les énoncés de quelques théoremes que j' ai trouvé dans mes récherches sur les solutions en nombres entiers positifs ou negatifs de l'équation cubique homogene à trois variables.

On sait selon *Fermat* que l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

n'est pas resoluble en nombres entiers.

On peut ajouter la même chose pour les équations

$$x^3 + y^3 + 2z^3 = 0$$

$$x^3 + y^3 + 3z^3 = 0$$

j'ajoute que l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 0$$

est irrésoluble: aussi l'equation

$$2(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) = 27nxyz$$

quand

$$27n^2 - 8n + 4$$

est un nombre premier, est irrèsoluble: aussi l'èquation

$$4(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) = 27vxyz$$

est irresoluble quand

$$27v^2 - 36v + 16$$

est un nombre premier.

De plus l'équation

$$x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz$$

est irrésoluble dans les circostances suivantes.

Posons

$$M^3 - 27A = \Delta^3 \Delta'$$

ou Δ' ne contient nul facteur cubique. Alors si Δ' est pair et ne contient nul nombre de la forme

$$f^2 + 3g^2$$

et si A est un nombre premier, l'équation est irrésoluble excepté dans le cas que $\sqrt{\frac{-M}{A}}$ soit un nombre entier et dans ce cas là on peut donner la solution géneral de l'équation.

La même chose a lieu quand Δ' restant assujetie aux mêmes conditions qu'auparavant, A est une puissance d'un nombre premier de la forme $p^{3\omega \pm \omega 1}$.

La même chose a aussi lieu, sans que Δ' soit pair pourvu qu'il ne contient nul facteur $f^2 + 3g^2$, et que

$$A = 2^{3\omega \pm 1}.$$

La même chose a lien encore pourvu que Δ' ne contient nul nombre de la forme $f^2 + 3g^2$ avec les conditions suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{2} \text{ un nombre premier de la forme } \overline{qi} \pm 4 \\ \frac{M}{9} = \text{un nombre entier} \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{4} = \text{un nombre premier de la forme } qi \pm 2 \\ \frac{M}{18} = \text{un nombre entier} \end{array} \right.$$

ou si A, etant un nombre premier on a A, B respectivement de la forme

$qn + 2$, $qn + 6$ ou bien de la forme

$qn - 2$, $qn - 6$ ou bien de la forme

$qn + 4$, $qn + 3$ ou de la forme

$qn - 4$, $qn - 3$ ou de la forme

$qn \pm 3$, qn.

J'ai l'honneur etc.

Woolwich 10 Octobre 1856.

Il chiarissimo sig. prof. J. J. Sylvester che era in Roma nella prima metà di questo corrente Gennaio 1857 ci ha gentilmente promesso per gli Annali una Nota, risguardante la nuova, e generale soluzione del problema sulla partizione dei numeri: le importanti. ricerche di questo dotto geometra, si trovano già riportate dal medesimo senza dimostrazione nel *Quaterly journal*, *pag.* 141 *e seg. London july* 1855,

B. T.

VARIE COSE ASTRONOMICHE

NOTA

DI GIUSEPPE BIANCHI

Dopo il mio non amato e troppo lungo silenzio in codesti pregiati suoi annali di scienza fisico-matematica io mi propongo di offerirle raccolte nel presente articolo alcune notizie di vario argomento, che mi sembran al tutto non prive di un tal quale interesse. E per prima, giacchè altra volta in codesti fogli mi trattenni intorno a orologi e cronometri le descriverò brevemente una preziosa macchinetta per uso di tempo, invenzione, e lavoro inglese del rinomato Dent, acquistata già in Londra, ove fu ammessa all'esposizion universale, e dalla splendida gentilezza del generoso acquirente e amator de' miei studi, l'Eccellenza del sig. Marchese Raimondo Montecuccoli, a me favorita in dono. È dessa una semplice mostra da tavolino che può chiamarsi

I.° *L'Orologio avvisatore delle stelle.*

A differenza di tutti gli altri orologi, ne' quali rivolgonsi intorno ad uno o più centri del quadrante fisso le freccie che segnan ore, minuti, e secondi in questo è mobile intorno al proprio centro, coperto esternamente da un bottoncino in ottone, il quadrante nella cui periferia del più grande raggio leggonsi tutte le 24 ore suddivise ciascuna di cinque in cinque minuti e che passan successivamente sotto un breve ago o indice fissato superiormente e fuori del quadrante medesimo. Non avendovi che un moto e un indicazione sola di tempo, il meccanismo ne è semplicissimo e il più robusto

però non atto a conoscere o misurare il tempo se non entro circa due minuti; ma la semplicità della costruzione riguardo al moto vi é poi combinata con altro artificio di uso utilissimo, e questo consiste in una serie di brevi e sottili verghette metalliche infisse quà e là tutto all'intorno e appena sopra la periferia divisa del quadrante, ciascuna delle quali, che apparisce all'esterno come un punto nero, arrivando col moto del quadrante sotto l'indice del tempo alza e lascia cadere internamente il martello di una campana si che n'esce ogni volta il suono di un botto. Se l'orologio, munito di registro e di bilanciere a compensazione, sia posto e regolato a tempo sidereó, le verghette vi sono collocate e distribuite in guisa che ad esse corrispondono le Ascenzioni rette o i passaggi meridiani superiori di altrettante stelle fra le più brillanti o delle maggiori grandezze alle latitudini d'europa e precisamente sono queste in numero di 26, tredici della I.ª cinque della 2.ª e otto della 3.ª grandezza, il nome e la costellazion delle quali rispettivamente, insieme alla posizione, si ha dai cataloghi. Quindi all'udir il botto della campana e guardando all'ora in quell'istante segnata si sa che all'istante medesimo la nota stella rispettivamente raggiunge la sua culminazion meridiana. Oltre a ciò vi ha nel quadrante una periferia concentrica, e un poco al disotto di quella delle ore, la qual'è divisa di 10 in 10 minuti, ossia in 144 parti eguali, e a ciascuna divisione è praticato un piccolo foro in cui può inserirsi e fermarsi a vite nella grossezza del quadrante un bottoncino di ottone destinato a mettere in oscillazione col suo gambo un pendoletto che percuote d'ambe le parti nell'interno la campana e ne genera per alcuni secondi un acuto suono, come di sveglia. L'oscillazione e il suono producesi repentinamente non appena il bottoncino fermato (e ve ne ha sei da fermarsi quà e là nei fori) è pervenuto all'indice delle ore. Egli è chiaro dopo ciò che volendo esser avvisati alcuni

minuti prima che una data stella passi pel meridiano all'uopo di osservarla non si ha che da portar e chiudere uno dei detti bottoncini nel foro precedente di circa 10 minuti l'istante del passaggio o della osservazione; e se l'osservatore fosse per avventura distratto colla mente in calcoli o in altri pensieri, allo scoccar e battere della sveglia se ne scuoterà e si recherà tosto all'osservazione che non andrà perduta, come potrebbe altrimenti accadere. Di conseguenza quest'Orologio da tavolino, tenuto nel gabinetto da studio di un Astronomo, non è tanto un oggetto di ornamento per eleganza e pregio di lavoro che molto più non debba dirsi utile per l'uso a cui serve, e di esso avrebbero a fornirsi le specole maggiormente attive o di prim' ordine. E non meno l'orologio stesso può vantaggiosamente adoperarsi negli usi qualunque della vita civile, regolandolo al tempo solare o comune, e ricevendone gli avvisi precedenti all' atto e istante di una determinata operazione cui molto prema di non fallire per una causa qualunque di smemorataggine. Tal è l'ufficio e giovamento dell'orologio avvisatore di Dent, che però in particolare venne immaginato e costrutto dall'ingegnoso artefice a peculiare servizio di pratica Astronomia, come dimostra l' indicazione dei passaggi meridiani delle principali stelle.

II.° *Un doppio Eclisse lunare parziale e totale possibile a un tempo.*

L'Eclisse della Luna, di pochissimo non totale, annunziato dall'effemeridi per la notte dal 13 al 14 Ottobre del corrente anno, col favore di un Cielo bellissimo e stato veduto e ammirato per tutta Europa, e come di uno spettacolo veramente magnifico a contemplarsi, quasi ogni pubblica gazzetta ne ha tenuto discorso. Da parecchie Specole se ne fecero le precise osservazioni del cammino dell'ombra

terrestre lunghesso la superficie dell'emisfero lunare a noi rivolto, osservazioni già inserite e pubblicate ne' giornali astronomici. Però il contorno di quell' ombra essendo per la sua generazione, anzichè una linea ben terminata una sfumatura o degradazione di qualche larghezza, il giudizio degli appulsi o contatti lunari ne diviene alquanto incerto nè saprebbesi tirarne conseguenze di calcolo se non approssimate. Ommessa per tal motivo l'operazione scientifica di misura io pure con altri voglio limitarmi a vagheggiar semplicemente il fenomeno, e notarne dal principio al fine le fisiche circostanze che offran materia di riflessione. Quest' eclisse pei nostri meridiani e puro cielo d' Italia tanto più è riuscito rimarchevole quanto il suo colmo è avvenuto all'ora circa della mezzanotte, cosicchè il suo svolgimento per noi presentavasi nella maggior elevazion della Luna e quindi a condizion atmosferica più propizia. Piena così e alta la Luna, bello è il vederne illanguidir lo splendore poco a poco e progressivamente dalla parte orientale del disco verso l'occidentale; indi nella prima di queste arrivar e avanzarsi del pari l'ombra terrestre sfumata, e di plumbeo colore, che ricopre e non lascia più distinguere, fino ad un certo punto, le varie parti lumeggiate del disco; dipoi, avanzatasi di più l' ombra, ricomparir tali parti, e trasparir, come da un velo rosseggiante, e ognor più vivaci ma non tanto che, all'essere pressochè adombrato l' intero disco, non appaja la volta celeste sparsa d' innumerevoli stelle fino alle più minute come a notte serena e senza luna; e infine all'emersione lunare offerirsi allo spettatore le stesse apparenze e vicende in ordine inverso. Durante la massima oscurazione io notai emergere istantaneamente dal lembo occidentale della Luna due stelle telescopiche o piccolissime, ed altra simile poco mancò non s' immergesse nell'orientale, sfuggendo ad essa la Luna col suo moto in declinazione verso il polo boreale. Una qualunque delle

stelle, vicine bastantemente al piano dell' eclittica ove distendesi l'ombra terrestre, può essere occultata in un eclisse lunare, sì che ne avvenga per noi simultaneo un eclisse duplice di luna, e di stella, ma fuori di questa circostanza le stelle più minute e telescopiche e parimenti i novelli piccoli pianeti non potranno mai vedersi occultati dal nostro Satellite in plenilunio.

Innanzi che accadesse il recente eclisse lunare dubitavasi benchè di piccola differenza, se il medesimo sarebbe riuscito parziale o totale. Negli annunzi dell'effemeridi si leggeva sopra quelle di Berlino che il calcolo più accurato ne porgeva la massima quantità oscurata di digiti 11, 97 e quindi la parte scoperta di $0,03 = 5''$ (preso il diametro orizzontale della luna $= 33'\ 36''$); sopra quelle di Londra, ossia dal Nautical Almanac in parti del diametro lunare $= 1$ assegnavasi la parte non oscurata $= 0,006 = 12''$; dall'effemeride Milanese dicevasi questa parte di 0 digiti e minuti $20 = 56''$, e la stessa dalla conoscenza dei tempi di Parigi era indicata forse alquanto maggiore nella minima distanza ivi data dei centri della Luna e dell'ombra terrestre, e $= 29'.\ 31''$. L'immediata ed effettiva osservazione ha deciso che l'eclisse è stata realmente parziale. Osservandolo col mio cannochiale di Fraunhofer a forte ingrandimento io non vidi rimanere scoperto fuorchè un breve e strettissim'orlo del disco lunare che stimai non maggiore di 5 a $6''$, laonde a mio giudizio avrebbe colto nel vero l'effemeride di Berlino, un pò meno quella di Londra, e assai più lungi quella di Milano e Parigi.

Fu pur bello in quella notte del 13 ottobre e nelle successive fasi dell'eclisse il vedersi Giove brillantissimo, poco discosto e all'occidente della luna. E quanto non sarebbe stato più raro e meraviglioso lo spettacolo, se in quei momenti avesse potuto combinarsi l' occultazione lunare, avvenuta dipoi e solo un mese circa più tardi, del maggior

Pianeta del nostro sistema, per massa e volume, che ognor mi richiama la cara e sublime imagine dell'*Adamida* di Klopstock! Ma nella detta circostanza neppur avvenne alcun eclisse, benchè sì frequente, dei Satelliti di Giove nell'ombra del pianeta; laonde non potè avverarsene il titolo, in apparenza paradossale, imposto al presente paragrafo, e che naturalmente si spiega con due Lune che si eclissino a un tempo, come sarebbesi realizzato se, durante il recente parzial eclisse della nostra Luna terrestre, si fosse trovata immersa totalmente nell'ombra del suo più grande pianeta una delle quattro Lune gioviali.

III.° *L'occultazione di Giove* *la notte dall'* 8 *al* 9 *Novembre di quest'anno.*

Un'occultazione di Giove per la nostra Luna è sempre un fenomeno, quanto vago e piacevole a vedersi con un buon cannocchiale, profittevole altrettanto alla scienza di misura per l'osservazione precisa che può farsene. Quella perciò ch'era prenunciata nell'effemeridi per la notte dall'8 al 9 del Novembre testè caduto avrà certamente occupata l'attenzion degli Astronomi; nè io pure mancai di recarmi e trattenermi ad osservarla, benchè in ora piuttosto incomoda, in questa R. Specola. Il cielo per me, in apparenza e all'occhio nudo, sarebbesi detto sereno presso il luogo del fenomeno, ma di fatto l'atmosfera nostra vi era velata da un'alta e non rara nebbia di guisa che usando cannocchiali a forti ingrandimenti ne venivan confuse le immagini dei contorni e dell'altre parti illuminate sì di Giove che della Luna, e i Satelliti del primo vedevansi appena come languidi punti; il perchè mi convenne servirmi di oculari dolci o più deboli. Un'altra circostanza rendeva men bello il fenomeno ed era la simultanea congiunzione del 1.° col 3.° Satellite e del 2.° col 4.°, cosicchè due ore prima

dell' occultamento lunare non vedevansi fuorchè i Satelliti 3.° e 4.°, e soltanto il 2.° emerger doveva dall'ombra del pianeta dopo la detta occultazione e già tramontati insieme la Luna e Giove. Inoltre il 3.° Satellite penetrò e si perdette nell'ombra stessa del suo pianeta innanzi che la Luna raggiungesse ed occultasse il sistema gioviale, ed io ne osservai l'istante dell'immersione a

11.^{h} 59.^{m} 58.^{s} 2. di tempo medio a Modena.

Ecco ciò premesso la mia osservazione dell' occultamento lunare:

1.° Contatto dei lembi di Luna e Giove	13.^{h}44.^{m}	9.^{s}1	}	di
2.°	45.	33. 4	}	tempo
disparizione istantanea del 4.° Satellite	48.	1. 1	}	med.

La notazione dei minuti secondi è precisa; e riscontrai pure, leggendolo immediatamente all'orologio, il minuto primo della disparizion del Satellite; ma l'osservazione, fatta da me solo, non mi permetteva nei brevi intervalli fra l'uno e l'altro istante di osservazione di toglier l'occhio dal cannocchiale per legger ogni volta il minuto all' Orologio del quale io numerava e teneva in mente le battute dei secondi. All'emersione poi la Luna declinata e prossima all'orizzonte vi restò avvolta in uno strato di nubi o di densi vapori che la tolsero interamente di vista, perlocchè la seconda parte dell'osservazion del fenomeno me ne andò perduta.

IV.° *Un Eclisse di Sole ed un Eclisse di Luna, non che possibili realmente avvenuti ad un tempo.*

Se l'argomento propostomi e svolto nel paragrafo II°, nel suo titolo aveva del paradosso, molto più ne ha il presente dal modo e titolo di enunciarlo. A chi domandasse invero di risolverne l'enigma o il quesito della possibilità

del caso, sarebbe tosto da rispondere essere assurdo, e perciò impossibile, che la Luna si trovi a un tempo in congiunzione e in opposizione al Sole per averne simultaneamente alla superficie terrestre un Eclisse di questo e di quella. Ma ciò è vero per la nostra terra, che ha una Luna o un Satellite soltanto; non così per Giove, che ne ha quattro, nei moti delle quali, relativamente al proprio pianeta e al Sole, può benissimo combinarsi che avvengano ad un tempo le opposte sizigie e quadrature dall'una all'altra, e val a dire che mentre una di esse, rispetto a Giove, trovasi al plenilunio, una seconda sia nel novilunio, una terza nel primo quarto, e la quarta nel secondo. E il plenilunio o novilunio simultanei (visibili però dagli emisferi opposti della superficie di Giove) possono accadere a sì breve distanza dal piano dell'orbita di Giove stesso che dal primo abbiasi un Eclisse lunare, o del Satellite, e dal secondo alla superficie dell'opposto emisfero del pianeta un Eclisse del Sole. Veduto il qual doppio fenomeno contemporaneo dalla terra corrisponde, quello alla disparizione di un Satellite di Giove nella grande ombra del pianeta, e questo al passaggio della piccola ombra dell'altra Luna o del Satellite opposto sopra il disco di Giove medesimo illuminato dal Sole. Una siffatta combinazione, che però non dev'essere molto frequente ad avverarsi, accidentalmente io credetti di osservare la sera 19 di Novembre ultimo scorso. Poco innanzi le ore 7 di detta sera collimando a Giove col mio cannocchiale di Fraunhofer a massimo ingrandimento notai il primo istante dell' emersione del 2.° Satellite dall'ombra del pianeta che fu a

$6.^h\ 49.^m\ 47.^s\ 3$ di tempo medio a Modena

seguitando poscia il Satellite emerso a crescer di luce per circa $2.^m$ e $15.^s$ Vedevansi allora i due Satelliti 2.° e 4.° all'Oriente di Giove, e gli altri due 1.° e 3.° all'occidente.

Ora, poco innanzi l' osservata emersione, io rimarcai sul disco di Giove presso il lembo Sud-Est una piccola macchia rotonda ben contornata e assai scura, che si avanzò molto sensibilmente e scorrendo lunghesso la fascia più meridionale, ossia verso il lembo Sud-Ovest del disco. Questa macchia, per grandezza e figura, e velocità e direzione di moto parallelo alle fascie mi parve non poter esser altro che l'ombra del 1.° Satellite il quale si movesse dalla parte inferiore della sua orbita, in riguardo alla terra, verso la superiore, ossia da oriente a occidente; poichè la direzione del moto dell'ombra segue quella del moto del corpo che la proietta. Tutto ciò potrebbe facilmente verificarsi dalle tavole dei movimenti del 1.° Satellite e dai luoghi geocentrici di esso e di Giove, ma non avendo io, al momento che scrivo, agio di eseguirne il calcolo, mi terrò pago alla verosimiglianza del mio giudizio alla semplice ispezion del fenomeno; donde però vien confermato che può sempre, accadere un eclisse di Sole simultaneamente ad uno di Luna, ed ambo visibili allo stesso terrestre osservatore.

Mi rivolgerò infine piuttosto a riflettere, che siccome nell'effemeridi astronomiche si trova utile, per avvertirne gli osservatori, di prenunciar le disparizioni e riapparizioni dei Satelliti di Giove, desumendole dal calcolo delle loro opposizioni al Sole rispetto al pianeta, così mi sembra che tornerebbe per avventura non meno utile produrvi pure il calcolo e gli annunzi delle congiunzioni de'medesimi, e indicarvi quelle che recano un Eclisse del Sole al pianeta. Perciocchè osservate queste con buoni e potenti cannocchiali, oltre al nuovo mezzo di corregger le tavole dei moti, potrebbe venirnè l'occasione a qualche novello discoprimento inaspettato, come la porsero per la velocità della luce le opposizioni e gli eclissi lunari di Giove.

INTORNO ALLE SUPERFICIE LE QUALI DEFORMANDOSI RITENGONO LE STESSE LINEE DI CURVATURA.

DI CODAZZI DELFINO

PROFESSORE NELL'I. R. GINNASIO LICEALE DI PAVIA.

1. Le x, y, z, coordinate rettangole d'una superficie, siano funzioni di due variabili μ, ν tali che le equazioni $\mu=$ cost, $\nu=$ cost esprimano i due sistemi di linee di curvatura. Si chiamino m, r l'arco ed il raggio di curvatura corrispondenti alle linee $\nu=$ cost; e si chiamino n, s le analoghe quantità per le linee $\mu=$ cost. Siano a, b, c i coseni degli angoli, che la normale alla superficie nel punto di coordinate μ, ν fa co' tre assi. Infine si denotino con apici in alto le derivate prese rispetto a μ; e con apici in basso quelle prese rispetto a ν. Sussistono, come è noto, le sei equazioni seguenti

$$a'=-\frac{x'}{r}\,,\quad b'=-\frac{y'}{r}\,,\quad c'=-\frac{z'}{r}\,,$$

$$a_{,}=-\frac{x_{,}}{s}\,,\quad b_{,}=-\frac{y_{,}}{s}\,,\quad c_{,}=-\frac{z_{,}}{s}\,;$$

eliminando dalle quali i coseni a, b, c, si deducono le tre

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)x'_{,}=x'\left(\frac{1}{r}\right)_{,}-x_{,}\left(\frac{1}{s}\right)'\,, \\ \left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)y'_{,}=y'\left(\frac{1}{r}\right)_{,}-y_{,}\left(\frac{1}{s}\right)'\,, \\ \left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)z'_{,}=z'\left(\frac{1}{r}\right)_{,}-z_{,}\left(\frac{1}{s}\right)'\,. \end{cases}$$

Siccome

(2) $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = m'^2, \quad x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = n_i^2,$$

dalle quali

$$x'x'_i + y'y'_i + z'z'_i = m'm'_i, \quad x_i x'_i + y_i y'_i + z_i z'_i = n_i n'_i;$$

inoltre

$$x'x_i + y'y_i + z'z_i = 0;$$

così, moltiplicando le (1) ordinatamente dapprima per x', y', z', dipoi per x_i, y_i, z_i, e sommandole s'ottengono le due

(3) $$\left(\frac{1}{r}\right)_i = (\log m')_i\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right), \quad \left(\frac{1}{s}\right)' = (\log n_i)'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right).$$

Derivando il prodotto $\frac{1}{rs}$ ed osservando le (3) si trovano

$$\frac{1}{s}\left(\frac{1}{r}\right)' = \left(\frac{1}{rs}\right)' - (\log n')'\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{rs}\right),$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{s}\right)_i = \left(\frac{1}{rs}\right)_i - (\log m')_i\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{rs}\right);$$

perciò, ponendo $\frac{r}{s} = \rho$, saranno

$$\rho' = (\log n_i^2)' - \rho\left(\log\frac{n_i^2}{rs}\right)', \quad \rho_i = \rho\left(\log\frac{m'^2}{rs}\right) - \rho^2(\log m'^2)_i.$$

Si formino ora i due valori di ρ'_i, si eguaglino tra loro, e si sostituiscano nell'equazione risultante invece delle ρ', ρ_i i rispettivi loro valori; fatte le riduzioni risulterà

(4) $$\left[(\log m')'_i - (\log m')_i\left(\log\frac{n_i^2}{rs}\right)'\right]\rho^2$$

$$-\left[\left(\log\frac{m'n_i}{rs}\right)'_i - (\log m'^2)_i(\log n_i^2)'\right]\rho$$

$$+ (\log n_i)'_i - (\log n_i)'\left(\log\frac{m'^2}{rs}\right)_i = 0.$$

Quest' equazione serve ad esprimere il rapporto de' due raggi di curvatura d'una superficie per mezzo degli archi delle linee di curvatura, quando sia noto il volore di $\frac{1}{rs}$ formato con le stesse quantità. Ora, la formola di Gauss, la quale fa conoscere il valore di $\frac{1}{rs}$ in funzione degli archi di due sistemi qualunque di linee esistenti nella superficie, diventa nel caso in cui queste linee siano ortogonali tra di loro

$$(5) \qquad \frac{1}{rs} = \frac{-\left(\frac{m'_{,}}{n_{,}}\right)_{,} - \left(\frac{n'_{,}}{m'}\right)'}{m'n_{,}} .$$

2. Per quelle superficie, le quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura, l'equazione (4) dev'essere soddisfatta da sè stessa indipendentemente dal valore di ρ; diversamente il rapporto de' raggi di curvatura resterebbe costante mentre la superficie si deforma. Eguagliando a zero il primo ed il terzo coefficiente, ed integrando le equazioni risultanti, s'ottengono

$$(a) \qquad (\log m')_{,} = k(\nu)\,\frac{n_{,}^{2}}{rs} \;, \quad (\log n_{,})' = h(\mu)\,\frac{m'^{2}}{rs} \;;$$

ovvero

$$\frac{m'_{,}}{n_{,}} = k\,\frac{m'n_{,}}{rs} \;, \quad \frac{n'_{,}}{m'} = h\,\frac{m'n_{,}}{rs} \;;$$

ove le h, k sono due funzioni arbitrarie, l'una di μ l'altra di ν. Ponendo

$$\log\frac{m'n_{,}}{rs} = t \;,$$

la (5) diventa

$$(b) \qquad ht' + kt_{,} + h' + k_{,} + 1 = 0 \;;$$

ed eguagliando a zero il coefficiente secondo della (4) si

ottiene

$$(c) \qquad t_{\prime}' - 4hke^{2t} = 0.$$

Le equazioni (b), (c) non possono sussistere contemporaneamente; difatto si derivi la prima due volte, una rispetto μ ed una rispetto a ν, e si elimini mano mano la quantità $t_{\prime}'$ mediante la seconda; risulterà

$$t''_{\prime} = -4ke^{2t}(h' + 2k_{\prime} + 2kt_{\prime}) .$$

Si derivi la (c) rispetto a μ, e si eguaglino tra loro i due valori di $t''_{\prime}$; si troverà

$$ht' + kt_{\prime} + h' + k_{\prime} = 0 ;$$

equazione assurda, come insegna la (b). Dunque il problema non ammette soluzione, ogni qualvolta le h, k abbiano entrambe valori differenti dallo zero.

Si ponga $k = 0$, e la prima (a) diventerà $m'_{\prime} = 0$; la quale insegna che le linee $\nu =$ cost sono geodetiche e quindi piane. Difatto in questo caso m' è funzione della sola μ, per cui denominando λ l'arco d'una linea qualunque tracciata sulla superficie sarà

$$\left(\frac{dm}{d\lambda}\right)^2 + n_{\prime}^2 \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)^2 = 1 ;$$

la quale, come è noto, insegna appunto che le $\nu =$ cost sono geodetiche. La prima (a) e la (c) integrata forniscono

$$(d) \qquad m' = \mathrm{A}(\mu) , \quad \frac{m'n_{\prime}}{rs} = \mathrm{B}(\mu)\ \mathrm{C}(\nu) ;$$

ove le A, B, C sono funzioni arbitrarie delle variabili notate tra parentesi. In seguito, la seconda (a) e la (b) somministrano

$$(e) \qquad n_{\prime} = \mathrm{C}\int h\mathrm{AB}d\mu + \mathrm{D}(\nu) , \quad (h\mathrm{B})' + \mathrm{B} = 0 ;$$

ove D indica una nuova funzione arbitraria. Si scriva

$$h = -\frac{E(\mu)}{E'(\mu)} ,$$

ove E denota una funzione di μ; e si facciano

$$C = 1 , \quad hAB = 1 ,$$

il che equivale a sostituire le variabili $\int C d\nu$, $\int hAB d\mu$ alle ν, μ. Si dedurrà dalla seconda (e)

$$B = E'$$

scrivendo E invece del prodotto della stessa E per una costante arbitraria; quindi saranno

$$(f) \qquad m' = -\frac{1}{E(\mu)} , \quad n_{,} = \mu + D(\nu) , \quad \frac{m'n_{,}}{rs} = E'(\mu) .$$

Queste e le (3) riducono le (1) alle seguenti

$$\frac{x'_{,}}{x_{,}} = \frac{1}{\mu + D} , \quad \frac{y'_{,}}{y_{,}} = \frac{1}{\mu + D} , \quad \frac{z'_{,}}{z_{,}} = \frac{1}{\mu + D} ;$$

da cui

$$x_{,} = \xi_{,}(\mu + D) , \quad y_{,} = \eta_{,}(\mu + D) , \quad z_{,} = \zeta_{,}(\mu + D) ;$$

ove le ξ, η, ζ sono funzioni arbitrarie di ν tali che soddisfacciano l'equazione

$$(g) \qquad \xi_{,}^2 + \eta_{,}^2 + \zeta_{,}^2 = 1 ,$$

come insegna la seconda (2). Infine

$$(h) \quad x = \int D\xi_{,} d\nu + \xi\mu + \alpha(\mu) , \quad y = \int D\eta_{,} d\nu + \eta\mu + \beta(\mu)$$
$$z = \int D\zeta_{,} d\nu + \zeta\mu + \gamma(\mu) ;$$

ove le α, β, γ sono funzioni arbitrarie di μ tali che soddisfacciano l'equazione

$$(k) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2(\xi\alpha' + \eta\beta' + \zeta\gamma') + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \frac{1}{E^2} ,$$

come insegna la prima (2). Affine di determinare queste va-

rie funzioni si faccia

$$\frac{1}{E^2}-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2=\delta^2,$$

e si deducano dalla (k) le seguenti

$$\xi\alpha''+\eta\beta''+\zeta\gamma''=\delta\delta'\ ,\ \xi\alpha'''+\eta\beta'''+\zeta\gamma'''=(\delta\delta')'.$$

Dovranno essere

$$\alpha'''\gamma''-\alpha''\gamma'''=0\ ,\ \beta'''\gamma''-\beta''\gamma'''=0\ ,\ (\delta\delta')'\gamma''-\delta\delta'.\gamma'''=0\ ;$$

da cui

$$(l)\quad \alpha=G\gamma+H\mu+K\ ,\ \beta=L\gamma+M\mu+N\ ,\ \delta^2=2P\gamma'+Q^2\ ,$$

ove G, H, . . . sono costanti arbitrarie ; quindi la (k) si decomporrà nelle due

$$(m)\quad (\xi+H)^2+(\eta+M)^2+\zeta^2=Q^2,\ G(\xi+H)+L(\eta+M)+\zeta=P.$$

Ora le funzioni ξ, η, ζ si determineranno mediante le (g), (m), le funzioni α, β mediante le due prime (l), e le funzioni $\gamma(\mu)$, $D(\nu)$ rimarranno arbitrarie nelle equazioni (h).

Moltiplicando le (h) ordinatamente per G, L, 1 e sommando i risultati, si trova

$$Gx+Ly+z=P\mu+(G^2+L^2+1)\gamma+GK+LN\ ;$$

la quale insegna che le linee di curvatura μ = cost. sono situate in piani paralleli tra loro. Dunque le superficie espresse dalle equazioni (h) sono le stesse considerate da Monge al § XVII della *Application de l'Analyse à la Géométrie* ; anzi le (h) contenenti due funzioni arbitrarie potranno aversi come l'integrale generale dell'equazione alle derivate parziali del second'ordine, la quale esprime la proprietà caratteristica di queste superficie. Le (h) moltiplicate rispettivamente per $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ e sommate danno

$$\xi_{,}x+\eta_{,}y+\zeta_{,}z=\xi_{,}\int D\xi_{,}d\nu+\eta_{,}\int D\eta_{,}d\nu+\zeta_{,}\int D\zeta_{,}d\nu+K\xi_{,}+N\eta_{,}\ ;$$

la quale manifesta la nota proprietà delle medesime superficie, quella cioè d'avere le linee di curvatura $\nu =$ cost. situate in piani perpendicolari ai piani delle prime.

Si pongano $k = 0$, $h = 0$, e le (a) diventeranno

$$m'_{,} = 0\ ,\quad n'_{,} = 0\ ;$$

quindi si dedurrà dalla (5)

$$\frac{1}{rs} = 0\ ,$$

la quale esprime la proprietà caratteristica delle superficie sviluppabili.

Dunque due soli gruppi di superficie ritengono deformandosi le stesse linee come linee di curvatura; cioè le superficie aventi le linee di curvatura dell'un sistema situate in piani paralleli, e le superficie sviluppabili.

Pavia, 14 gennaio 1857

N.B. La pubblicazione degli Annali del 1856 essendo alquanto ritardata, fà sì che in questo fascicolo del Novembre venga pubblicata una Memoria con la data del Gennaro 1857.

B. T.

SULL' OPERA DEL SIG. FLOURENS.

DELLA LONGEVITA' UMANA E DELLA QUANTITA' DELLA VITA SUL GLOBO

ARTICOLO

DEL PROF. G. PONZI

Nel decorso del passato anno 1856 (*), comparve in Parigi la terza edizione dell'opera del sig. Flourens, intitolata *Della longevità umana, e della quantità della vita sul globo.* Io son debitore al mio distinto collega ed amico, il prof. Volpicelli, della lettura di questo importante libro. Dedicato sempre al medesimo genere di studi, trascorsi quell' opera col più vivo interesse, tanto per lo stile semplice e candido con cui è scritta, quanto per ammirare le profonde dottrine di cui è ricolma. Scopo del lavoro del sig. Flourens è quello di far meglio conoscere la durata dell'umana vita, e considerar sotto un punto generale di vista la quantità di essa e la sua comparsa sul globo. Ognun sà come in tutti i tempi, gli uomini presero tale interesse a conoscer la vita, che lunghe e gravissime questioni si agitarono, ne mai si raggiunse lo scopo di risolverle, perchè i filosofi a seconda del proprio modo di vedere, giudicarono diversamente della vita nelle svariatissime forme sotto cui si manifesta. Ma dopo le grandi scoperte, che che tanto onorano il nostro secolo, somministrarono una più esatta idea del creato, della natura, dei suoi esseri, e delle leggi che l'armonizzano e regolano, la scienza naturale della vita cangiò in qualche parte eziandio d'aspetto: molti astrusi problemi furono soluti, e il poter contemplare oggi la vita organica sotto un punto di vista, complessivo e generale, è cosa del tutto moderna e nuova. Tale è il pregio dal-

(*) Questo fascicolo del novembre 1856 viene pubblicato nel Marzo 1857.

l' opera del sig. Flourens, di cui io esporrò in breve il contenuto, e ciò facendo mi si renderà opportuno dire alcuna cosa sullo stato primitivo dell' organismo, e sull' analogia delle potenze che lo dominano con quelle del pianeta a cui appartiene, per dimostrare la legge di natura unica e stabile: le quali cose mi sembrano non discordare colle teoriche esposte dal chiarissimo autore.

Ponendo frattanto mano al lavoro, e parlando della prima parte di quell' opera, il sig. Flourens consagra un intero capitolo, a commentare le gesta del prototipo della sobrietà, il celebre Luigi Cornaro di Venezia, e del religioso fiammingoLessio suo traduttore e imitatore, a fine di dimostrare, e fissare il termine naturale della umana vita, che stabilisce ad un secolo, come termine medio, sebbene non manchino esempi di vecchiezze molto più avanzate: esempi rarissimi, avvegnachè la maggior parte degli uomini sono uccisi dai loro costumi, passioni, e disagi della vita.

Stabilita la vita secolare dell'uomo, passa nel secondo capitolo a parlare della vecchiaja, considerandola sotto quattro differenti aspetti, fisiologico, psicologico, patologico, ed igienico. Fisiologicamente parlando la vita consiste nello svolgimento di un periodo di tempo, durante il quale l'essere vivente percorre un movimento parabolico, diviso in due metà una ascendente, discendente l'altra, che a lor posta si dividono eziandio in due metà, in guisa che tutto il periodo vitale viene costituito di quattro diverse età: l'infanzia, la giovinezza, la virilità, e la vecchiaja. Ciascheduna di queste vengono dal Ch. A. ulteriormente ripartite in due, da cui risultano una prima e seconda infanzia, una prima e seconda giovinezza, una prima e seconda virilità, una prima ed ultima vecchiaja. Le prime due età, comprese nel periodo ascendente, si succedono ciascuna di 10 anni in 10 anni, le altre spettanti al periodo discendente di 15 in 15, senza peraltro che nelle une e nelle altre possa scorgersi una linea marcata di passaggio,

ma si succedono sfumando le une nelle altre. da cui risulta un tutto continuato e graduale. Assegna il Ch. A. per carattere della prima infanzia il processo di dentizione, e perciò la distingue col nome di periodo dentario. Nella seconda comprende l' adolescenza , cui si annette la pubertà, ed ha per carattere distintivo, l' incremento del corpo in lunghezza. Alla prima giovinezza appartiene lo sviluppo del corpo in grossessa, e alla seconda il perfezionamento degli organici tessuti, e perciò detta d'invigorazione. A questo punto tutto lo sviluppo è compito, e il corpo giunto al massimo della sua robustezza , che si mantiene nelle due età virili , durante le quali il corpo resta nello stato stazionario, fino al principiare della vecchiaja. Nel primo periodo di quest'ultima età, incomincia la decadenza del corpo, coll' esaurimento delle forze soprabondanti o di riserva ; nell' ultimo finalmente il logoramento delle forze attive. Tutte queste fasi meglio si scorgeranno nel seguente quadro sinottico.

Età		Durata	Anni di Vita	Caratteri
Infanzia	1.ª	10	10	Dentizione
	2.ª	10	20	Accrescimento in lunghezza
Giovinezza	1.ª	10	30	Accrescimento in grossezza
	2.ª	10	40	Invigorazione
Virilità	1.ª	15	55	Stato stazionario
	2.ª	15	70	Id.
Vecchiaja	1.ª	15	85	Esaurimento delle forze di riserva
	2.ª	15	100	Esaurimento delle forze attive

Ognuno può giudicare quanto vera, retta, e filosofica sia questa maniera di distinguere le età componenti tutto il periodo vitale dell'uomo; essa è del tutto nuova e originale del Signor Flourens, ed io stimo abbiasi immediatamente a sostituire a quella convenzionale partizione per settenari, che tuttora si mantiene nelle scuole: miserabile reliquia di vecchi pregiudizi.

Dalla parte fisica il Ch. A. discende alla psicologica, e passati in rivista tutti coloro che scrissero sulla vecchiaja, fa rimarcare qual differenza esista fra lo svolgimento del periodo fisiologico della vita , e il progresso dello spirito. Nel primo le forze organiche crescono e decrescono, nell'altro la potenza psicologica sempre più aumenta fino all' ultimo periodo d' esistenza. *L' esprit*, egli dice pag. 58 *a deux grands ressorts d' action: l' attention, et la réflexion. Dans la jeunesse, l' attention, vive, mobile, toujours presseè, se répand sur tout; mais la réflexion manque. Dans l' äge mür, l' attention et la reflexion s' unissent ensemble, et c' est ce qui fait la force de l'àge mùr. Dans la vieillesse, l' attention fuit, mais la reflexion s'accroit; la vieillesse est l'àge où le coeur humain se replie sur lui-meme, et se sait le mieux.*

Nello studio patologico della vecchiaja, il sig. Flourens distingue· cogli antichi filosofi le forze *in riserva dalle attive*, come presso gli antichi medici *le forze oppresse, dalle risolute*, l'oppressione dalla risoluzione delle forze. *Dans les maladies de la jeunesse*, pag. 64, *le cas dominant est L'OPPRESSION des forces ; et c' est alors qui faut saigner : à mensure che le sang coule les forces opprimées se relevent.*

Dans les maladies de la vieillesse le cas dominant, est la RESOLUTION des forces, et c' est alors qu' il faut èviter , du moins en général, d' employer la saignèe. Queste verità frutto di una gran cognizione della vita , sono corroborate da sentenze ed esempi dei più valenti autori, dimostranti le vaste cognizioni dell' Autore.

Finalmente sul metodo per ottenere l' intero sviluppo vitale, egli dice, pag. 66, *Le chapitre de l'hygiene sera toujours le chapitre le plus important d' un livre sur la vieillesse , et l' article de la longevité sera toujours l' article le plus interessant de ce chapitre.* Dimostrata questa importanza, il Ch. A. viene alle regole per raggiungerne il fine , le quali sono: pag. 67 1.° *Saper d' esser vecchio*: 2.° *Conoscere se stesso* : 3.° *disporre convenientemente la vita abituale*: 4.° *Combattere tutte le malattie dalla loro origine.* Con queste quattro regole salutari, quanto si vivrà? *On ne vivrà pas plus que sa vie*, pag. 69; *mais on vivra toute sa vie, c' est-a-dire tout ce que permet d' espèrer la costitution particuliére de chaque iudividu, combinée avec les lois genérales de la constitution de l' éspece.*

In conseguenza di sifatta deduzione vien fuori un quesito : qual' è dunque la durata naturale e normale della vita umana? Questo quesito si propone il Ch. A. nel terzo capitolo della prima parte, e a rispondervi pone per base che, *tout dans l'economie animale, est soumis à des lois fixes*, pag. 71. La durata della vita può essere giudicata storicamente e fisiologicamente. Dopo aver esaminato tutto ciò che si osservó nello stato selvaggio. e che pochi in quello stato arrivano alla morte naturale , essendo quasi tutti vittime dei disagi, e dei pericoli in cui si trovano, dimostra chiaramente che la durata naturale della vita non dipende da cause esterne , ma dall' intima costituzione , e da virtù intrinseca dell' organismo. Il Ch. A. riporta la definizione della vita di Cuvier, la commenta, e ne deduce che il periodo vitale , nelle diverse specie , viene indicato dal più o meno rapido accrescimento del corpo, e perciò trova giusta l' osservazione di Buffon, che il periodo di gestazione è in ragione diretta della longevità, Stabilisce quindi dietro le sue proprie esperienze. che il segnale di un com-

piuto accrescimento o sviluppo del corpo, è la riunione delle ossa alle loro epifisi, e ne riporta moltissimi esempi, specialmente nei mammiferi, come i più prossimi all' uomo, e fra questi alcuni arrivati anche al doppio dell'ordinario periodo. Ciò che poi è singolare, il Ch. A. rimarca che la doppia infanzia cioè 20 anni, moltiplicati per 5 danno il numero di 100. o il totale ordinario della vita umana, ammesso da Haller e da Buffon. Peraltro insegna l'esperienza che nella classe dei mammiferi, dove meglio si osservò, la vita straordinaria, o quella che oltrepassa il secolo; può protrarsi fino al doppio, la qual cosa non è bastante a quietare lo spirito umano: tanto è l'innato desiderio del vivere una lunga vita.

Se non leggiere sono le questioni trattate nella prima parte dell' opera del sig. Flourens, gravissime e profonde risultano quelle agitate nella seconda e terza parte dell' opera istessa. Nell'intraprendere a parlare della quantità della vita, e della sua apparizione sul globo, io vorrei esordire con un quesito: *dove si trova la vita*? Ad una tal domanda tutti mi rispondono, essere essa giacente su tutta la superficie del pianeta terrestre, a modo di un grande involucro che tutto lo riveste, che si solleva sfumando nell' atmosfera fino ad una certa altezza, come si abbassa fino ad una certa profondità nei mari; e che sulla superficie dei continenti, o non penetra affatto o cosi poco, da considerarla come semplicemente distesa. Da questa general diffusione della vita sulla terra, io credo che a buon diritto possa argomentarsi, costituire non solo una parte integrale di essa terra, ma eziandio essere subordinata o partecipare alle influenze della legge, che governa lo stesso pianeta; imperoche niente d'inutile uscì dalle mani del Creatore, ma tutto armonizzato e connesso, *Newton* « dice il sig. Flourens » *dimostrava Dio. La legge unica che presiede a tutti i corpi dell' universo gli rivelava*

Dio, e l'unità di Dio. Se dunque gli esseri organizzati sono corpi dell' universo, se formano parte integrale del globo: se la legge di natura è *unica*, *semplice*, *universale*, *invariabile*, convien credere che gli effetti di questa devonsi riscontrare nel loro organismo medesimo, e nel loro movimento vitale.

A questo primo quesito ne succede un secondo: *lo strato di vita avvolgente il globo è egli omogeneo* ? E qui ancora tutti rispondono di no; ma che si compone di un numero infinito d'individui di svariatissime forme, in ciascuno dei quali si ripete il fenomeno della vita, consistente in un movimento determinato nei confini di una parabola, durante il quale l' essere chiamato a compierlo si mantiene nello stato di composizione, e dopo averlo trasmesso ad altri individui, declina, e muore, o si arresta, colla decomposizione e dissoluzione del corpo. E qui possiamo altresì dedurre un'altra conseguenza: che se la legge di natura si fa sperimentare isolatamente in ciascuno di essi, in ciascuno di essi devesi rinvenire analogia; laonde lo stesso modo di agire, gli stessi risultati che si osservano nel globo, e negli altri corpi celesti. In questa guisa nella sua economia la natura non ripete che se stessa; e perciò gli esseri organizzati potrebbero essere considerati in certo modo come tanti satelliti parassiti e sedentari, componenti uno speciale sistema terrestre: vecchia idea, giacchè vi furono già dei filosofi a cui non dispiacque considerar l'uomo quale un microcosmo, e la terra quale un essere organico vivente a grandi dimensioni.

A dire il vero, non vedo tanto assurda questa idea, io vi trovo una certa analogia, se non nelle forme esterne, almeno nelle interne disposizioni, fra un essere organico vivente nel suo stato primitivo o più semplice, e un corpo celeste. Quelle masse di trama organica vivente, che non hanno alcuna determinata forma, e perciò chiamate, *ani-*

mali amorfi, omogenee su tutti i punti per ammettere una riproduzione per laceramento o scissura, non potrebbero rappresentare quelle nebulose non ridotte, che sotto la foggia di stracciate nuvolette, splendenti di una luce pallida e lattiginosa, costituite di materia cosmica omogenea, sembrano negli spazi incommensurabili del cielo attendere quel *fiat* incomprensibile, per il quale la materia ponderabile, chiamata attorno un centro di attrazione assume la forma sferica? Similmente qual'è la forma primitiva organica se non la sfera? la quale chiaramente scorgesi in molti degli esseri più semplici, e sempre trasparisce attraverso quell'infinità di forme secondarie che offrono le più avanzate organizzazioni.

A dimostrare questa verità, prendete un animale qualunque anche il più complesso, e sia pur l'uomo stesso, tirate fuori del suo corpo quei rovesciamenti della pelle che ne costituiscono i visceri o gli organi delle funzioni vegetative (rientramento digestivo, respiratorio, e genito-urinario), voi avrete per risultato un sacco cutaneo, fornito di tante appendici, ciascuna delle quali destinata a servire d'istromento ad uffici diversi, e dentro del quale non resteranno che i tre grandi elementi necessari, costituenti altrettanti sistemi: 1.° il *cellulare* rappresentante la trama organica analoga a quella degli animali amorfi, ancor esso amorfo per esser adatto ad assumere una forma, tosto che viene chiamato a riparare o riprodurre i tessuti organici. 2.° *Il vascolare* o doppio sistema raggiato di canali; uno che và dalla periferia al centro, (il venoso o di assorbimento): l'altro dal centro alla periferia, (l'arterioso o di esalazione), entro i quali scorre il liquido nutritivo, o mantenitore dell'organismo. 3.° *Il nervoso*, ancor esso raggiato, e costituito di cordoni, che si accompagnano coi vasi, e sui quali trascorre l'imponderabile eccitatore della vita organica, o principio motore di tutta macchina.

Ma non basta. Supponete che tutte quelle appendici del sacco dermoide si raccorcino fino alla superficie da cui si spiccano, e che quella linea costituente l'asse del corpo, parimenti si restringa ad un punto centrale, conducendo seco tutti gl' interni sistemi. Ecco che di tutta quella organizzazione voi avrete formata una sfera senza perder niente : la cui esterna superficie sarà tutta divisa in sezioni, a ciascuna delle quali corrisponde una funzione vitale diversa. Ecco che tutto l' interno di questa sfera risulterà da un irraggiamento vascolare e nervoso, nuotanti nella massa cellulare che la riempie, a raggi eguali, ciascuno dei quali corrispondente ad una delle frazioni della superficie sulla quale termina.

Ne basta ancora: supponete che quelle esterne funzioni cessino di essere localizzate, e tutte si fondino in guisa, che da tutti i punti della superficie si assorba e si esali. In questa maniera voi avrete un corpo organico ridotto alla più grande semplicità, voi lo avrete ricondotto alla forma primitiva , quale risulterebbe se negli animali amorfi la vita si concentrasse in un punto, attorno cui si agglomerasse tutta la massa del loro corpo per prendere la forma sferica. Ora qual differenza corre fra un corpo organico in questo stato, e un corpo celeste? Negli uni e negli altri la materia ponderabile è agglomerata da una forza di attrazione raggiante, mercè la quale ne risulta la forma sferica. Ma questo corpo non potrebbe mantenere quel movimento intestino in che consiste la vita , se la sua attrazione non fosse contrabilanciata colla ripulzione, o contraria potenza, la quale mantenuta nell' equilibrio, permette alle molecole sospese di muoversi nella direzione raggiata, colla quale agiscono le forze istesse.

Egli è chiaro da ciò, che un tal moto intestino non potrà mai effettuarsi nei corpi solidi, ma solo nei fluidi, in quelli cioè tenuti nello stato di mobilità, in virtù del calorico latente. E chiaro altresì che nella formazione della

sfera la materia ponderabile attratta, deve condensarsi dalla periferia al centro, ed ecco sprigionamento della materia imponderabile, non soggetta al dominio dell'attrazione, ecco perdita di calorico che si fa raggiante, come avviene sempre, allorchè un corpo liquido passa al solido. Da ciò ne consegue, che l'essere risultante è sempre spinto a perdere il calorico e solidificarsi. Così ci facciamo ragione come nell'interno della sfera, costituita di massa elementare organica, vengano a comparire i rudimenti degl'organi essenzialmente vitali, cioè quelli che più direttamente debbono compiere le necessarie funzioni. Cosi vediamo che al primo addenzamento della superficie, o alla formazione del sacco dermoide, corrispondente alla crosta solidificata della terra, immediatamente succede il processo formativo dei vasi o canali conducenti il principio nutritivo, onde sia mantenuto l' equilibrio fra l' attrazione e la ripulzione, conosciute con linguaggio fisiologico, coi nomi di assorbimento e di esalazione. Ecco la duplicità di questi sistemi, e la loro forma raggiata, ecco le azioni e reazioni fra la superficie ed il centro, come avviene della terra, ecco il meccanismo della nutrizione, e il perenne rinnovamento di tutto intero il corpo veduto già da Leibnitz, e proclamato da Cuvier nella definizione della vita, riportata dal sig. Flourens, pag. 50. *Dans les corps vivants, aucune molecule ne rest en place; toutes entrent, et sortent, successivement; la vie est un tourbillon continuel, dont la direction toute compliqueè qu' elle est, demeure toujours constante.* Da cui deriva quel mutamento continuo di molecole componenti il corpo, senza che questo cambi di forma, paragonato da alcuni vecchi fisiologi ricordati dal sig. Flourens, al famoso vascello di Teseo, pag. 48, *qui ètait toujours le même vaisse au, quoique, à force d' avoir étè rèparè, il n' eut plus une seule des piéces qui avaient servi à le construire.* Tali dottrine mirabilmente vengono trattate dal chiarissimo autore, a dimostrare come si opera la vecchiaja, le quali meritano di

esser lette, giacché vengono corroborate da sperimenti da esso istituiti. Ma questi movimenti potrebbero darsi senza il principo motore? Certamente che nò. L'impoderabile biotico o fluido nerveo, che ora ci si offre sotto fórma di luce negli animali fosforescenti, ora sotto quella di calorico, negli animali a sangue caldo, ora sotto quella di elettrico, nelle torpedini, ma che in sostanza poco o nulla conosciamo: questo ministro del primo Motore, è l'elemento stimolante o eccitatore dell'organismo al compimento delle sue azioni. Imperocchè negli esseri organizzati si diffonde a tutte le parti del corpo, coll'irraggiamento del sistema nervoso, sempre accompagnato coi vasi, quale animatore dell'elemento mantenitore dell'organismo, o il sangue.

Un corpo organico elementare, costituito così nella sua forma primitiva, deve essere animato da un movimento di vita, eguale in ciascun dei raggi, da cui risulta la regolarità della forma. Da ciò prende principio la dottrina degli analoghi, professata dalla scuola di Geoffroy de Saint-Hilaire. La tendenza peraltro di questa sfera a rendere sempre più stabile, e consistente il suo organismo, la mettono in uno stato di disperzione calorifica incessante e continua. In questo consiste tutto lo svolgimento del periodo vitale, o di esistenza; giacchè se facciamo un confronto fra un individuo nello stato di germe, con uno giunto a morte naturale per decrepitezza, noi osserveremo nel primo risultare più parti liquide che solide, all'opposto nell'altro più solide che liquide. *Corpora non agere nisi soluta*; vecchio assioma che ci dimostra che solidificato il corpo, coll'irrigidimento dei tessuti, questi non prestandosi più ad agire negli organi, il movimento si deve lentamente estinguere, come ben si scorge dal quadro delle diverse età, fatto dal sig. Flourens, dove tutto si ammira l'andamento del vital periodo. Una tale differenza di stato chiaramente indica, che la vita consiste essenzialmente nel passaggio graduale, più o meno lento

del liquido al solido, ovvero in un raffreddamento del organismo. Questo movimento non è retto, ma parabolico: ascenderà sempre più nella formazione degli organi, e nel loro vigore sempre crescente, quindi resterà stazionario per alcun tempo, poi declinerà per gradi, di mano in mano che si perdono, prima le forze di riserva, poi le attive, fino a che per siffatte deficienze di azione, solidificati i tessuti organici, illanguidisce il movimento, finalmente tutto si estingue colla morte naturale. *La vie est un mouvement*, dice il sig. Flourens, pag. 47. *Le principe de la vie, quelle qu'en soit la nature, est, éminemment et visiblement, un principe d'excitation, d'impulsion, une force motrice*, che spinge il corpo attraverso tutte le fasi delle età, e a compiere tutto il periodo di sua esistenza. Ma di grazia, un processo di questa natura, non si osserva eziandio nella vita planetaria? Da tutti oggi si ritiene per dimostrato a rigore matematico, che la terra fu un dì liquida, per fusione ignea, e che tuttora và percorrendo un periodo di raffreddamento. Ciò basta a comprendere quale sarà la sua fine: vale a dire un totale sprigionamento di calorico, una completa solidificazione, una lenta morte; come sembra sia già avvenuta alla luna come corpo più piccolo, e meno denso.

Se tutto ciò è vero, a me sembra che la definizione della vita data da Cuvier risulti incompleta, avvegnachè accenna soltanto agli atti immediati per cui si compie, e non alla causa che li determina. Io v'indicherei anche questo passaggio dallo stato liquido al solido, o il raffreddamento vitale, come causa immediata dei fenomeni delle diverse età, ed effetto immediato della forza di eccitamento o principio motore incomprensibile.

Si avverta che la riferita definizione della vita si appartiene alla vita organica, alla vita che conviene a tutti i viventi, a quella vita che a giudizio di tutti, abbiamo comune co'vegetabili.

Si avverta eziandio che noi abbiamo esposto alcune analogie fra i corpi organizzati e i corpi celesti intorno alle quali lasciamo il giudizio ai savi ed istruiti lettori, ma non intendiamo di attribuire ai corpi celesti nei movimenti spontanei nè sensibilità, nè anima e molto meno anima ragionevole, spirituale e immortale come la nostra.

Anche da ciò prescindendo, non deve credersi che le accennate analogie, abbiano tale estensione da non presentare altre differenze: Purtroppo ne esistono, anche gravissime, fino a mascherare la verità delle esposte dottrine. E primieramente se ne offre una sensibilissima fra il pianeta, e gli esseri organizzati, nell'essere privi questi di rotazione. Taluno potrebbe chiedere: se gli esseri organizzati che si muovono nell'equilibrio, fra le due forze contrarie di attrazione e ripulzione, come la terra, perché non si rivolgono attorno il proprio asse come quella ? e come mai può svilupparsi la seconda forza per fare opposizione alla prima ? A me sembra che questi problemi possano sciogliersi coll'esempio delle stelle binarie, le quali girano attorno ad un centro, vuoto da qualunque corpo ruotante. Dunque a produrre la ripulzione non è necessario un corpo materiale che ruoti attorno se stesso. La ripulzione può esistere da se, senza essere prodotta , vale a dire fu creata da Dio per controbilanciare l'attrazione. Se esiste da se perchè non riconoscerla nei corpi viventi, senza chiedere il soccorso della ruotazione ? Concepito il meccanismo della vita , non si scorge che essa è una conseguenza necessaria dell'attrazione ?

Siegue un'altra differenza nell'infinito numero di forme svariatissime, che offrono gli esseri organizzati, in confronto colla terra, la quale mantiene sempre la forma sferoidale, o di un globo, come tutti gli altri corpi celesti. Qui devesi notare come le forme organiche, quantunque multiple, non alterano o distruggono punto le sopraccennate analogie. E siccome in tutti si compiono quelle stesse azioni necessarie

alla loro esistenza; così le forme organiche non sono che forme secondarie, derivate dalla sfera elementare comune a tutti, come fra poco diremo. Laonde io crederei piuttosto che il globo terrestre, e tutti gli altri corpi sferici che si trovano nell'immensità dello spazio, siano esseri creati sotto l'influenza di una medesima legge, come tutti gli altri, solamente arrestati nella lor forma primitiva, mentre gli organici sono passati alle secondarie, o alla modificazione.

Una terza differenza è quella della composizione della materia. Le combinazioni chimiche della materia inorganica o minerale sono quasi sempre binarie, raramente di tre elementi, rarissime di quattro: quelle dell'organica vanno sempre al di là del numero di queste. Gli elementi però sono identici, e ciò basta a provare non solo che gli esseri organizzati sono parte integrale di un tutto; ma altresì una certa maniera speciale di agire dell'elemento vitale, per cui modificandosi le chimiche affinità, i composti risultano di un maggior numero di elementi. Una tal differenza nell'azione sulle molecole, associata alla differenza nelle forme esterne che offrono gli esseri organizzati, sempre dipendenti dalle forme interne, piuttosto che opporsi ad un principio unico, mi sembra che accennino ad una diversa maniera di comportarsi del elemento vitale, più semplice nel pianeta, in modo più complesso negli esseri organici viventi; senza però deviare dal fine stabilito dal Creatore: vale a dire negli uni e negli altri ha caminato con passo diverso su di una medesima scala, per raggiungere un medesimo fine. Io non intendo peraltro che i minerali vengano presi isolatamente, per essere confrontati coi corpi viventi, come fin qui si è fatto nelle scuole, giacchè quelli non sono che minime frazioni, divelte dal corpo a cui appartengono. Io voglio considerare i minerali nella loro composizione planetaria a cui sono destinati; voglio cioè fare un confronto fra tutta la loro massa, e l'essere organizzato. In

questa maniera io vedo che, sebbene il numero degli elementi, combinati per semplice legge di affinità chimiche ordinarie, è più piccolo; il numero delle combinazioni è di gran lunga più grande, da cui risulta quello stuolo infinito di minerali diversissimi, che riempiono gli scaffali dei nostri musei. Al contrario la maggior concorrenza degli elementi a formare un composto organico, ha un numero di combinazioni più limitato. In questa guisa trovo una compensazione fra gli uni e gli altri, compensazione che mi avvalora l' idea di una semplice differenza nella maniera d' agire, non nell'essenza, perchè i fenomeni nella durata della loro esistenza sono analoghi. E siccome la modificazione non può distruggere la legge, cosi concludo che questa è unica, e universale per tutti gli esseri.

Una quarta differenza che mostrano gli esseri viventi col pianeta terrestre, é quella della generazione o della riproduzione individuale, onninamente negata alla terra. Se la vita è parte integrale di essa, come già si disse: se la vita si fraziona negli esseri organici, e questi la ritengono gli uni indipendentemente dagli altri, cioè ognuno di loro è un essere distinto, un microcosmo; se questi esseri infinitamente piu piccoli hanno una vita loro proporzionata: cioè percorrono un periodo molto più breve; egli è certo che se non fossero stati perennemente rinnovati, il globo presto si sarebbe trovato privo di una sua parte integrale. E qui é d' ammirarsi la magnificenza del sommo Fattore, nell'aver disposto quella mirabile successione d' individui, depositari precari del movimento vitale, nei quali la vita non nascendo che dalla vita, questa si continua in ogni specie creata, e si mantiene pel grande equilibrio del globo a cui appartiene, e perciò concorre all' armonia di tutto il creato. Il sig. Flourens chiaramente ci dice pag. 3. *La premiere loi de la vie est la loi de continuité. La vie ne natt que de la vie. Tout étre vivant vient d'un parent. La succession des individus nés*

les uns des autres, *est l' espéce*: ed altrove. *La vie ne se forme pas* pag. 162. *ne recomence pas avec chaque nouvel individu*, *chaque nouvel être. La vie ne commence qu' avec l'espéce. A compter du premier être créé de chaque espece la vie ne se forme plus*: *elle se continue.* Se dunque la vita è continuata nella specie, la generazione è tutta individuale; è un mezzo per ottenere questa continuità, la qual cosa conferma l' intimità col pianeta, e perciò colle leggi che lo regolano.

Il numero infinito delle forme secondarie che offrono i corpi viventi, si risolvono in tanti tipi, o modelli di organizzazione diversa, dalla natura sapientemente stabiliti, per raggiungere in ciascuno un diverso grado di squisitezza o perfezionamento nelle analoghe funzioni che tutte eseguiscono. L' estenzione maggiore o minore peraltro di siffatte facoltà non escono mai dai confini del piano stabilito nella creazione. Esse consistono nella localizazione delle funzioni in una parte della superficie della sfera, nello sviluppo del brano del derma corrispondente, e dell' interno suo raggio. Cosi se supponete, che le funzioni di assorbimento prendan posto in un emisfero della sfera primitiva e le funzioni di esalazione nell' altro, ne risulterà un vegetabile, il quale giacente sulla terra per mancanza di locomozione, immergerà in questa l'irragiamento radicale per assorbire i principi della sua nutrizione, e solleverà nell' atmosfera l' irragiamento opposto, per esalare la materia eterogenea al suo organismo, o scambiarla cogli elementi gassosi, atti a vivificare i suoi succhi circolanti. Al contrario se nel centro di una sfera primitiva, trovasi il rudimento delle facoltà animali, questo si separerà dall' altro vegetativo, per presiedere ciascuno allo sviluppo delle proprie funzioni; il vegetativo alle funzioni di assorbimento, e d' esalazione, l'altro a quella della facoltà animali, sensazioni, e movimenti volontari. Cosi sarà costituito un' animale, che

godendo della locomozione, fatto cioè libero e vagante sulla terra, per trovare di che nutrirsi, dovrà per conseguenza esser fornito di un' organizzazione diversa dal vegetabile.

Questi due tipi primitivi, corrispondono alle due grandi sezioni organiche, distinte col nome di regni della natura animale e vegetale. Ciascheduno di essi si suddivide poi in altri tipi secondari, corrispondenti alle classi. E qui è da notarsi, che nello svolgimento organico animale o nella localizzazione delle funzioni alla superficie della sfera; quelle della vita vegetativa si sviluppano per via di tanti rientramenti della superficie istessa, o del sacco dermoide, nell'interno del corpo (il tubo intestinale, o istromento assorbente la materia fissa: il sacco respiratorio, o istromento dell'assorbimento gassoso: il rientramento genitale, e orinario, per l' esalazione dei corrispondenti principj, senza togliere del tutto queste funzioni alla esterna superficie). Al contrario le facoltà animali si diffondono e si protraggono al di là della superficie, a modo di prominenze, (come sono gli organi dei sensi e quelli della locomozione): prominenze che più d' ogni altro concorrono a rendere svariatissime le forme secondarie.

Se per esempio supponete, che col rientramento nell'interno della sfera delle funzioni dermoidi, destinate a formare i visceri o organi delle funzioni vegetative, si spieghi da tutta l' esterna superficie un irraggiamento di produzioni locomotive : di questa sfera, voi avrete fatto un *Echino*. Che se questi raggi vitali spieghino la loro gagliardia solo sull' equatore, di modo che attorno questa periferia sorgano le protrazioni locomotive; la sfera si cambierà in un disco raggiato o in un *Asteria*. Così seguitando, se si moltiplichino i gangli della vita vegetativa, e si dividano per tener dietro e presiedere allo sviluppo delle funzioni, il corpo varierà ancora di forma in ragione di quei processi organici, come avviene ai *Molluschi*. Se a questo svol-

gimento di parti si aggiunga quello della vita animale, con una serie geminata di nodi o gangli nervosi, allungata in linea retta, da ciascuno dei quali si produce un irragiamento parziale; voi avrete un corpo modellato più o meno su di un'asse, in ragione dell'allungamento di quella serie. La qual cosa costituisce il tipo degli *Articolati*, specialmente degl' *Insetti*, e in altri *Crostacei*, nei quali per la prima volta a cagione di una tal disposizione, vedesi comparire la legge di simmetria, perchè i raggi o membri della locomozione, si dispongono per paja ai lati del corpo. Nei *Vertebrati* avviene lo stesso: ma nei Vertebrati l'allungamento dell'asse procede assolutamente dal nodo centrale della vita animale, che in questi esseri si allunga, per formare l'asse cerebro-spinale, fino ad uscir fuori del corpo e costituire un capo, dove son collocati gli organi dei sensi, mentre quelli del moto animale restano appajati ai lati del corpo. Tutti questi modelli d'organizzazione sono a lor posta variabilissimi entro certi determinati confini, da cui risultano altri subordinati tipi, corrispondenti alle famiglie naturali, ai generi, alle specie, alle razze, e alle varietà, da cui deriva l'ordine e l' armonia della natura.

Dall'idea di quest'ordine procede una conseguenza: ed è che la quantità della vita deve essere determinata sul globo. Questa questione viene agitata dal sig. Flourens, e forma il titolo della seconda parte della sua opera. Tutto ciò che fu disposto dalla creazione è invariabile : se ciò è vero, e se la vita è parte integrale del globo, ne discende che la vita deve essere determinata : Di fatto resta a un dipresso sempre la stessa. Buffon fu il primo a calcolarla, e dopo di lui Cuvier; ambedue viddero una certa quantità determinata di molecole organiche, tenute in perenne movimento di vita, e successivamente trasmessa, da un' individuo all'altro, pel mantenimento delle specie. Il sig. Flourens peraltro crede di dover studiare la quantità

della vita, piuttosto negli esseri organici, che nelle molecole organiche, le quali, dice, non sono, come le *monadi* del Leibnitz, che uno degli espedienti filosofici, immaginati a trarsi d'impaccio e che per veritànon ne traggono. Egli osserva due cose: pag. 104 *la première que le nombre des espéces va toujours en diminuant depuis qu'il y a des animaux sur le globe, et la seconde, que le nombre des individus, dans certaines espéces va toujours, au contraire, en croissant; de sorte que, à tout prendre, et tout bien compté, le total de la quantité de vie, jentends le total de la quantité des êtres vivants, rest toujours en effet, et comme le dit Buffon, á peu prés le méme* ». A ciò dimostrare fa un magnifico quadro delle specie perdute, e dopo aver fatto conoscere la superiorità dell' uomo, i mezzi che gli ha somministrati la natura, e quelli che si è procurato colla sua intelligenza, rende chiaro, che se una quantità di specie di animali sono mancati, l' uomo istesso moltiplicato mille volte sopra ogni specie di animali, e gli animali che gli appartengono, ha compensato tale mancanza. *Dieu, en créant un être qui pût sé connaître soi-même et la connaître, a donné par cela même un maître, à toutes les autres êtres* pag. 122. Ma la compensazione è assoluta come pretende Buffon? A questo quesito il Ch. A. non risponde, solo fa rimarcare pag. 128. che « *Il est plus facile de prononcer sur ces sortes de questions, quand on fait son compte avec les molecules organiques, que quand on le fait avec les êtres vivants.* »

La parte storica della vita presenta tanti e così singolari fenomeni, molti dei quali furono causa di questioni gravissime, che tuttora non sono peranche risolute. Queste vengono trattate da maestro nell'opera del sig. Flourens, che ora andiamo ad esaminare. Ma a procedere con ordine, meglio mi sembra dover prima parlare dell' *apparizione della vita sulla superficie del globo*, quindi delle sue vicende. Il Ch. A. consagra tutta la terza parte della sua opera nell'esposizione dei principali fatti componenti la storia geologica,

e fa vedere come dalla cognizione acquistata delle epoche della terra viene annunciato pag. 238. che *la vie n'a pas toujours été sur ce globe.* E di fatti abbiamo oggi per matematicamente dimostrato, che il pianeta fù in origine nello stato di fusione ignea. In questo stato di altissima temperatura, certamente moltissimi elementi organici doveano essere sotto forma gazosa a formar parte di una densissima atmosfera, e qualunque aggregato organico si fosse potuto formare, questo sarebbe stato immediatamente, arso e decomposto per via secca. *Pour que la vie put s' y établir*, sono parole del sig. Flourens, pag. 238. *il a fallu que la température en fûit assez refroidie , que la surface en fût consolidée, que l' air s'y fût dégagée des eaux, que toutes les matiéres solides, liquides, gazeuses, y eussent pris chacune leur état propre: et quand toutes ces choses ont été amenées a ce point voulu, la même MAIN, qui le y avait conduites, a crée la vie et l' a repandue sur la terre.*

Pour que les animaux pussent exister, il leur fallait une certaine température: pour qu' ils pussent se nourrir, il leur fallait un certain ensemble de substances végétales et animales: pour que les animaux pussent respirer, il leur fallait un certain air: il fallait que dans cet air se trovât un élément respirable : il fallait que cet élément respirable s' y trouvait constamment, et constamment dans une proportion donnée.

Ma quello che singolare si rende, è certamente che alla prima comparsa della vita sul globo, questa si manifestò con i vari tipi organici, che sopra abbiamo accennato, già stabiliti, tanto primitivi che secondari. I primi strati fossiliferi della crosta terrestre, quelli sui quali incominciamo a leggere la storia del globo: il terreno siluriano inferiore, contiene i primi rudimenti degli esseri vegetali, e subito appresso di essi gli animali, rappresentanti i vari tipi del loro regno. Da questo fatto tiriamo una conseguenza importantissima , ed è che il processo formativo organico , di cui

abbiamo parlato di sopra, vale a dire il passaggio della materia alla forma primitiva, e da questa alle secondarie, fu onninamente compreso nel gran *fiat* degli esseri viventi, e che dalle mani stesse dell'immensoFattore uscirono tutti quei diversi tipi organici già costituiti. Allora in qualche modo fu compiuta la creazione, perchè allora il globo ricevette il suo involucro di vita , e con essa le leggi del Creatore, che la governarono , concordanti con quelle che già regolavano il globo istesso, e l'universo intiero.

Il sig. Flourens non crede le moderne scoperte apporsi al Genesi. In un § (p. 219) *De Deluc et de la date recente du dernier déluge*, loda non poco gli scritti geologici di Deluc difensore del Genesi, che ben conobbe la *data recente del diluvio mosaico, gran fatto vanamento posto in dubbio*, e dimostrò che *il primo de' nostri libri sacri, il Genesi, racchiude la vera istoria del mondo*. Il § seguente a il titolo: *Rapport de recit de Moïse avec les monuments de la nature.* ivi leggiamo *ci é stato un diluvio: Mosè lo dice e la terra intiera lo dice e lo racconta come Mosè.* Quanto ai sei giorni, essi sono *sei spazi di tempo sei intervalli di durata*, dice l'A. con Bossuet e molti altri. Senza discutere intorno ai sei giorni, pensano parecchi rispettabili scrittori, che il principio del Genesi possa intendersi in modo da non poter soffrire offesa non che dalle scoperte già fatte, ma nè pure di qualunque possa farsi in seguito. Tali son quelli, che seguono l'opinione del cel Bùckland, (*Vindiciae geologicae or the connexion* . . . . *Oxford* 1820) tra i quali di l'Emo Card. Wiseman: per altra via giunge allo stesso scopo il fu ab. Waterkein prof. dell'università cattolica di Lovanio (*De la géologie et de ses rapports avec les verites reveleès. Louvain. - La science et la foi l'ouvre de la crèation. Liege.* 1845.)

Tornando ai primi viventi; veggiamo negli antichi tempi questi disparire, e la vita mostrarsi in nuove forme , ma però senza che sieno tolti o cangiati i suoi caratteri essen-

ziali, e ciò fino all'apparizione dell'uomo, e di tutte le specie che con esso vivono sulla Terra, lo studio di questi esseri, costituisce la Paleontogia: studio importantissimo, essendo oggi da tutti abbracciato, qual mezzo sicuro a distinguere le diverse epoche della terra, e le sue corticali stratificazioni. Questa verità dimostrata ; è una manifesta prova delle strette attinenze e dipendenze, che ha la vita col pianeta a cui appartiene. Conciossiachè il disparire di certe specie trova una naturale e semplice spiegazione nei fatti geologici ora dalla scienza guadagnati, indicanti una serie di vicende e di rivoluzioni, probabilmente tutte derivate o effetto dello stesso raffreddamento terrestre. Se la vita degli esseri è un' intima dipendenza del pianeta, io trovo giusto che al variare delle condizioni di questo, variar debbano eziandio quelle della vita, e godo di trovarmi in ciò d'accordo col sig. Flourens pag. 128. « *Un fait se montre, du moins, avec évidence: c'est que, à mesure que ce globe, qui n'a pas toujours été dans des conditions propres é la manifestation de la vie, se modifie, et si je puis ainsi dire s' accomode de plus en plus à cette manifestation, une variation tres-sensible s'y opére dans le proportions relatives des espéces. Dans les premiers âges du globe, ce sont les especés inferieures, les speces infimes qui dominent: dans les âges subséquents, ce sont les espèces gigantesques, et redoutables, soit dans la classe des reptiles, soit dans celle des quadrupédes; dans l'âge actuel: ce sont les animaux que l'homme protége, et l'homme luimême, à qui toute supériorité sur ce globe, même celle du nombre, parait ulterieurement dévolue.*

Allorchè s' incominciarono ad avere più positive nozioni sugli esseri viventi, e si conobbero certe transizioni di organismo, si pensò dai filosofi che tutti gli esseri della natura potessero ordinarsi sopra una grande scala. Ma dopo che si è verificato, che dalle mani del Creatore venner fuori contemporaneamente tutti i tipi organici, e le specie ad

esse spettanti indicare le diverse età della terra, cadde il progetto di una scala generale, per essere sostituite tante minori, per quanti sono i tipi o modelli dell' organismo. Peraltro tali progressi non tolsero dal campo gravissime questioni. L' estinzione delle specie trovava una facile spiegazione nelle variazioni di condizioni del globo, per effetto del suo raffreddamento; ma l' apparizione delle nuove restava ancora inesplicata e naturalmente inesplicabile. Si pensò allora di proporre un'altro quesito. » Se le specie nuove erano derivate da quelle estinte, ovvero una nuova creazione era intervenuta nella loro comparsa », ed ecco stabilita e messa in campo la questione sulla stabilità o mutabilità delle specie. Il Ch. A. insieme a Cuvier è di ferma opinione, che le specie siano stabili, e a ciò dimostrare consagra due capitoli della seconda parte della sua opera: il 2.° sulla *stabilità delle forme della vita, o delle specie*: il 3.° *sulla formazione della vita.*

L' immobilità delle forme specifiche viene sperimentalmente trattata, e dimostra chiaramente che le specie sono fisse, e non si mutano, nè per cause lente, nè per cause subitanee o violente, nè per incrociamento. Ammette però una certa tendenza a variare entro certo limiti, trasmissibili anche per generazione, da cui vengon fuori le razze: ma queste non possono essere mai prodotte esclusivamente da influenze esterne, o cause remote, se non si prestano le interne o prossime, pag. 150. *Mais ces deux forces réunies, la tendance primitive á variation et la trasmission successive des variations acquises, jusqu'où vont-elle? Vont-elle jusqu á faire sortir une race de son espéce, jusqu' á faire que cette race né soit plus féconde avec les autres races de son espéce? Nullement.* Se adunque le razze sono il limite estremo della variabilità sopportabile delle specie, convien conchiudere che queste siano fisse e immutabili. Da ciò consegue che come il primo apparire sul globo degli animali, così la formazione di quelli, che ai primi successero, e molto più quella dell'animal ragione-

vole, della creatura fatta ad immagin di Dio, non si spiega senza l'intervenzione immediata della mano onnipossente del Creatore. Il Ch. A. pone termine a questo capitolo con riportare l'esperienze di Buffon, e proprie, dirette a conoscere la quantità dei sessi nelle specie, dalle quali risulta una conferma alla verità annunciata da Buffon, che il numero dei maschi sulle femine, é più grande nelle specie pure, grandissimo nelle miste. La qual cosa porta a concludere che in natura tutto è soggetto a delle leggi fisse, perfino la predominanza del sesso maschile sulle femmine nelle nascite.

Nell' capitolo seguente si trattano tre questioni: 1.° della continuità della vita, e delle generazioni spontanee: 2.° della parte eguale del maschio e della femina nella formazione dell' essere, e della preesistenza dei germi: 3.° della forza di riproduzione organica, e dei germi riparatori. Noi abbiamo già detto il motivo per cui la vita debba essere continuata; necessità che il sig. Flourens. proclama pag. 158. come la prima delle leggi vitali. » *En effet, les individus périsent, mais la vie ne perit pas. Avant de périr, ils l'ont transmise:*

Et quasi cursores vitali lampada tradunt

(Lucr.)

» *La vie de chaque espéce est comme une chaîne dont tous les anneaux viennent, et si je puis ainsi dire, sortent les un. des autres. Qu' un anneau manque, et l' espéce est perdue* pag. 160. » *Pour chaque espéce, la vie n' a cammencé qu' une fois. A compitér de lá elle a passé d' un être a l' autre, sans interruption, sans rupture, dans toutes les espéces qui aujourdhui ancore subsistent: toutes les espéces oú une rupture s' est fait, oú une interruption s' est produite, oú le fil continu de la vie s' est rompu, sont aujourd' hui des especes perdues. Et ces espèces perdues ne renaissent plus.* pag. 162.

Tutte queste sentenze del sig. Flourens, si verificano nelle specie per qualunque causa perdute.

A spiegare le comparse delle nuove, si ricorse ad una vecchia ipotesi, la più gratuita di tutte: alle generazioni spontanee. L' insussistenza peraltro di questa dottrina, sebbene vanti illustri settatori e di molta vaglia, fu bastantemente dimostrata dal sig. Flourens, colla stessa continuità della vita, la quale una volta creata viene nella stessa quantità protratta nelle specie, e il progresso dell' anatomia comparativa chiaramente fa scorgere, che gli stessi polipi, e le monadi volute dal Lamarch, quanto vogliansi dare per semplici, sono già tanto composti, da escludere qualunque idea di generazione spontanea. E perciò più le cognizioni si accrescono, più decade questa fallace dottrina, e bene annuncia il chiarissimo autore, ehe le osservazioni microscopiche di Ehremberg finiranno con bandirla per sempre dalle scuole.

Passa l'A. alla ipotesi della preesistenza dei germi sostenuta eziandio da rispettabilissimi moderni filosofi, i quali alla domanda; come si forma un nuovo individuo, un nuovo essere? rispondevano, il nuovo essere non si formi perchè già si trovava del tutto formato. A far comprendere la poca stabilità di questa risposta, il Ch. A. riferisce certe sue esperienze sull'incrociamento della cagna collo chacal, le quali provano, nella funzione che mantiene la specie, la parte eguale del maschio e della femina, ed essere in facoltà dell'uomo per via di generazioni sostituire un germe ad un'altro, dal che si deduce che gli germi non sono affatto preesistenti. Ma non basta perchè avendo supposto perfino i germi riproduttori dell'organismo: il sig. Flourens dopo aver riportate l' esperienze di Trembley sui polipi, di Bonnet sulle naiadi, da esso ripetute sulle naiadi stesse e sulle salamandre, dopo aver riferite le osservazioni di Reamur sui gamberi, e quelle di Federico Cuvier sulle corna dei cervi, richiama a memoria

le sue stesse esperienze sulla formazione delle ossa, e conchiude che neppure esistono questi germi riproduttori dell' organismo nè *generali*, nè *parziali* o *locali*.

Dopo publicata la terza edizione dell'opera del sig. Flourens, *nella Revue des deux mondes, tom.* 3.° 15 *Juin* 1856, videsi comparire un articolo intitolato » *La vie aux divers ages de la terre* » scritto dal sig. Babinet in proposito di detta opera, pienissimo di sapere, e con quell'energico stile che caratterizza uno scienziato della sua fatta. Peraltro questo dotto investigatore della natura, sembra poco proclive ad ammettere la compensazione annunciata dal Flourens, fra il numero degli individui e le specie perdute, pel mantenimento della quantità della vita sul globo; cercando nel tempo istesso dimostrare, che l'età antropica non è inferiore nè nel numero nè nel volume agli animali che vissero nei lunghi periodi dei secoli anteriori. Quest' asserzione sebbene possa ammettere qualche eccezione, io crederei sia pure accettabile; avvegnachè non trae seco consequenze di grande rilievo sulla dottrina della vita. Quello che però nel suo articolo sembrami meritare una qualche parola, piuttosto che essere passato sotto silenzio, si è la dottrina da esso commentata, in opposizione a quella esposta e dimostrata dal sig. Flourens. Questo chiarissimo autore esplicitamente confessa le sue simpatie per la scuola di Geoffry de Saint Hilaire. *qui nous montre*: sono sue parole pag. 702 *les developpements successifs des germes primitifs des epéces animales et vegetales, sous les influences exterieures, donnant naissance á des espéces nouvelles, et realissant une sorte de creation moderne dont la sagesse industrieuse de la puissance créatrice a préparé d' avance la possibilité et les moyens. Elle a etablit les lois de la nature á l' origine des chose., et elle le suit sans y deroger, puisqu' on ne peut pas admettre un imprevoyance de sa parte, c' est le* semel jussit, semper paret *de Sénéque.* » Dai quali precetti deriva » *réfutation de l'hy-*

potése de l'immutabilité des espéces » influence modificatrice des circonstances extérieures » possibilité que les races actuelles descendent des races antiques.

I ristretti confini di un'articolo non mi permettono ragionare tanto minuziosamente sugli argomenti esposti in quell' articolo, nà avrei bastante forza a tenermi a fronte di un autore di quella fatta: io però soltanto vorrei dire: 1.° che se la vita è parte integrale del globo, mi sembra naturale che al globo istesso spetti somministrargli i materiali, come in verità sempre ha fatto: e cosi si verifica il passo della Genesi, che *fu ordinato da Dio alla terra di produrre le piante; gli alberi, e gli animali, come alle acque i pesci*: cioè Iddio col suo comando formò i corpi viventi, ma volle che la materia, e allora e in seguito fosse somministrata dal globo terraqueo, non già che i germi primitivi producessero le nuove specie, che es. gr. le piante generassero gli animali, i molluschi generassero i pesci, o questi gli uccelli, e le scimie generassero l' uomo: 2.° che le creazioni successive, non potranno mai accusare d' improvidenza la podestà suprema; perchè se stabilito era che il globo istesso dovesse percorrere il suo periodo d' esistenza, o di raffreddamento, la vita che dovea farne parte integrale, non poteva restare eguale in tutte le sue fasi: ma comparire nuovamente a tempo debito, e cangiare in ragione dei mutamenti delle sue condizioni. Se conviene ammettere la creazione precedente del globo, e quella susseguente della vita, può anche ammettersi questa stessa creazione, ripetuta altre volte: 3.° che tutte le analogie che offrono fra loro le parti organiche, piuttosto che denotare i rudimenti della mutabilità degli organi, per passare da una specie in un altra, accennano piuttosto alla unità di origine, alla forma primitiva comune a tutti, la quale in ogni individuo, e in ogni sviluppo dei loro germi traspariscе sempre, attraverso le tante svariate forme organiche se-

condarie, anche le più avanzate : 4.° che tutte l' esperienze da cui sembra risultare variazioni di caratteri per influenze esteriori, sono sempre circosritte entro i limiti sopportabili dalla tendenza istessa delle specie a variare, quale fu fatta notare dal sig. Flourens: 5.° che le variazioni dei caratteri per azione di potenze esteriori, non potranno mai raggiungere il grado di una specie distinta, fino a che questa non sarà resa indipendente dalla virtù generativa, sebbene questa stessa virtù sembri accessoria al sig. Babinet: 6.° io vorrei dire con Cuvier che, *si les espéces ont changé par degrés, on devrait trouver des traces de ces modifications graduelles: entre les paleotheriums , et les especes d' aujourd' hui on devrait decouvrir quelque formes intermediaires, et jusque á present cela n'est point arrivé. Pourquoi les entrailles de la terre n' ont elle point conservé le monuments d'une genéalogie si curieuse, si ce n' est parceque les especes d'autrefois etaint aussi que le notres ou du moins parce que la catastrophe qui les a détruites ne leur a pas laissè le temps de se livrer á leurs variations? Disc. sur les Revel. de la surf. du globe.* pag. 118. 7.° Finalmante che una linea di demarcazione si nota sempre fra specie e specie, non solamente in quelle appartenute a diverse età della terra, e interrotte dalle sue rivoluzioni; ma eziandio in quelle spettanti ad una medesima epoca; lo che costituisce i caratteri differenziali i quali talvolta sono salientissimi. Potrà mai trovarsi una transazione fra le facoltà di una scimia, e l' intelligenza e loquela umana?

In fine dopo tanti studi, dopo tante ricerche. dopo tanti esperimenti fatti , e che tutto dì si accrescono a sostegno dell' ipotesi della preesistenza del germe, quali sono i risultati ottenuti? Si è raggiunta forse una certezza positiva? Niente finqui di tutto ciò. È vero che moltissime cognizioni si sono guadagnate dai lavori di tanti scienziati che hanno arrichito il tesoro delle scienze in tali ricerche ; ma la questione non è stata tolta dalla palestra ,

la questione non è risoluta. E qui può dirsi collo stesso sig. Babinet art. cit. pag. 785. « *Toutes les fois que l'intelligenee de l'homme veut essayer de comprendre la puissance créatrice, la voix de raison lui crie, monte, monte ancore, monte toujour, puis, quand elle est au plus haut point ou elle peut attendre , elle est encore aussi éloignée du but qu'au moment du depart.* » Nella conclusion dell'articolo sulla preesistenza dei germi lo stesso sig, Flourens. confessa non saper spiegare la formazione degli esseri nuovi, e ripete col Málebranche pag. 186. *Il est bon de compréndre clairement qu' il est des choses qui sont absolument incompréhensibles.* Peraltro dove sono delle cose sulle quali l' umano intelletto si arresta, l' anima si sprigiona per sollevarsi al cospetto del suo Creatore, ed esclamare col Real Profeta:

Quam magnificata sunt opera tua Domine !
Omnia in sapientia fecisti.

Roma li 22 Gennaro 1857.

SULLA FORZA CENTRIFUGA TERRESTRE IN QUANTO STURBA LA DIREZIONE DELLA GRAVITA'

FORMOLE E SPERIENZE

DEL DOTT. B. SANTINI.

Tutti che non sono affatto digiuni di cose fisico-matematiche sanno bene che la forza centrifuga terrestre non pure scema il valore assoluto della gravità ma ben anco ne sturba la direzione. Il perchè un *filo a piombo* in equilibrio non si diriggerebbe al centro della terra fosse pure omogenea ed ellissoidica di rivoluzione. E noto infatti che essendo P E (fig. 1) un arco meridiano del nostro globo la forza centrifuga $sr=f$ si svolge nella direzione vr parallela al semiasse maggiore C E; il perchè l' angolo vrl è misurato dalla latitudine geocentrica $Ea=l$, e si ha la componente orizzontale $f\operatorname{sen}l$ che sturba la direzione della gravità , o vogliam dire la risultante delle attrazioni terrestri. E sic-

come tanto questa forza che quella giacciono sopra il medesimo meridiano, così i fili a piombo ed i gravi cadenti da piccole altezze devieranno alcun poco al *sud* dal centro C.

Calcoliamo dapprima l' angolo α (fig. 2) che un filo a piombo αC equilibrato fa colla direzione della gravità CG$=g$.

Scomposta questa forza nelle due FC orizzontale e CH in continuazione del filo, si vede bene che per l'equilibrio deesi avere

$$FC = f\text{sen}l \, .$$

Onde si trova

$$\text{tang.}\alpha = \frac{f\text{sen}l}{g} \quad (a) \text{ note infine}$$

E la projezione di $\alpha C = \lambda$ è

$$p = \frac{f\text{sen}l}{g}\lambda \, ;$$

chè quì si tratta d' archi assai piccoli, e può la tangente scambiarsi col seno.

Torna utile trasformare queste equazioni; cotalché serbando assai di semplicità, risparmino il calcolo separato di f. A ciò serve la formola

$$f = \frac{4\pi^2}{T^2}\rho\cos l \quad (b) \text{ not. in fin.}$$

Avremo pertanto

$$(1) \qquad \text{tang}\alpha = \frac{m}{g}\rho\text{sen}2l \, ;$$

$$(2) \qquad p = \lambda \frac{m}{g}\rho\text{sen}2l \, ;$$

equazioni richieste, in che m rappresenta il numero costante

$$\frac{2\pi^2}{T^2} = 0,0000000026.$$

Dicasi altrettanto delle formole susseguenti ove si contiene f.

Rispetto a'gravi cadenti da piccole altezze è chiaro che per la forza centrifuga son tratti al sud con moto uniformemente accelerato. Il perché nel tempo t dell'intera caduta, si ha la deviazione

$$d = \frac{f\text{sen}l}{2}\, t^2$$

E detta σ l'altezza corrispondente a f si ha pure

$$(3) \qquad d = \frac{\sigma}{g} f\text{sen}l.$$

Per conseguenza I°. *la projezione di un filo a piombo non molto lungo* (eq. (2)) *e la deviazione di un grave caduto per piccola verticale, variano proporzionalmente all'altezza;* 2.° *essa proiezione, per altezze eguali, si eguagliano.* E cio nella ipotesi che il grave cada nel vuoto; conciossiachè la resistenza dell'aria alteri assai l'eq. (3).

Non è a trasandarsi questa ricerca togliendone occasione di offrire alla meccanica una nuova formola differenziale, che forse non sarà indarno anche in altre occorrenze.

Cominciamo dall'osservare che, considerando il moto per minimi tempi, in ciascuno di essi la forza acceleratrice $\varphi^{(x)}$ può aversi come istantanea. Allora lo spazio δ, percorso in deviazione dopo il tempo θ dell'intera caduta, consterà degl' infiniti spazi elementari

$\theta\varphi dx$, $(\theta - 1)\ \varphi' dx$, $(\theta - 2)\ \varphi'' dx$, ... $(\theta - x)\ \varphi^{(x)}\ dx$;
avremo quindi

$$(4) \qquad \delta = \int (\theta - x) \varphi^{(x)} dx$$

Per esprimere $\varphi^{(x)}$ in funzione della variabile è a riflettersi che, nel caso di piccole velocità, la resistenza di un *mezzo* fluido cresce men che non fa il quadrato di esse velocità. Assumendo dunque la forza ritardatrice nv^2 avremo in genere un termine a gran pezza manchevole. Il perchè all'uopo nostro sarà men lunge dal vero assumere $nf^2x^2\text{sen}^2l$, lo che dà

$$\varphi^{(x)} = f\text{sen}l(1 - nfx^2\text{sen}l)$$

Onde la formola (4) addiviene

$$\delta = f\text{sen}l\int(\theta - x)(1 - nfx^2\text{sen}l)dx$$

Ed effetuatane la integrazione da $x = o$ fino ad $x = \theta$, somministra.

$$(5) \qquad \delta = \frac{f\text{sen}l}{2}\theta^2\left(1 - \frac{n}{b}f\theta^2\text{sen}l\right) \qquad (2)$$

espressione richiesta che qui vuol essere preferita a

$$(6) \qquad \delta = \frac{1}{n}\log\tfrac{1}{2}\left(e^{\theta\sqrt{(f\text{sen}l.n)}} + e^{-\theta\sqrt{(f\text{sen}l.n)}}\right) \text{ (1)}$$

più complimplicata e men vera (pag. 450). E ciò per quanto concerne la parte speculativa.

Rispetto alla sperimentale, ponendo mente alla resistenza verticale dell'aria, in parità di circostanze dev'essere $\theta > t$ (pag. 447), e quindi anco $\delta > d$. Sicchè le percosse di un grave abbandonato a se stesso debbono aberrare al sud dal filo a piombo.

Procacciamo di verificare questa aberrazione.

Praticato un forellino f in lastra sottile (fig. 3) all'altezza di 5.^{m}2 del suolo ed a *piombo* col pernio p, fissai lo zoccolo NS di tal modo che una linea condotta per p, giacesse nel meridiano. Il pezzo di legno ns, girevole sopra lo zoccolo, portava egualmente una linea tracciata pel centro di rotazione. Poste in corrispondenza le due linee, dal foro f feci cadere assai volte entro un tubo un piccolo cilindro di legno del peso di 90 gram. (2), girando a ciascuna volta

(1) Venturoli Elem. di mecc. e d'Idraul. vol. I. n°. 228.

(2) Non omisi l'impiombatura inferiore del grave, perchè la caduta riescisse più regolare, ed un ago traversante pel centro di gravità fosse meglio condotto a segnar dritto il punto della percossa.

il pezzo mobile per 180°. Osservai realmente la mia previsione avverata, che cioè i punti delle percosse non coinciderebbero. Eccone le aberrazioni.

Percosse	Aberrazioni al sud		Piani di aberrazione	
1ª... 6ª	0.00598	Media 0.00608.	1° 00'E.	Medio 0.°11'E.
7 ...12	0.00610		0 40 E.	
13 ...18	0.00690		1 00 O.	
19 ...24	0.00575		1 30 E.	
25 ...30	0.00558		0 30 E.	
31 ...36	0.00600		0 30 O.	
37 ...42	0.00650		0 40 O.	
43 ...48	0.00576		1 40 E.	
49 ...54	0.00615		1 00 E.	
55 ...60	0.00604		1 20 O.	

Ciascuna delle aberrazioni al sud è la media di tre che si ottengono di 6 in 6 cadute. Ciò feci per abbreviare il prospetto e per dare a'resultati maggiore uniformità compatibilmente con quelle anomalie delle quali è impossibile purgare affatto la caduta verticale. É inutile avvertire che di esse anomalie son pur conseguenza i piccoli angoli che il piano di deviazione fa col meridiano.

Volendo confrontare il resultato medio sperimentale con quello che si ottiene dal calcolo di $2(\delta - d)$, son questi i dati numerici

$l = 44.°11'$, $f \operatorname{sen} l = 0{,}01692$ (for. 1), $g = 9{,}80522$, $\theta = 1''.2$

raggio del cilindro 0,012,

volume 0,000031667

peso di un pari vol. d'aria . . . . 0,041151[1]

[1] Despretz. Fisica. § 205.

sua gravità specifica 1299,5,

detta del cilindro . . . . $\frac{90+0,041151}{0,000031667}=2843375$,

coef. di res. n.... $\frac{2}{3}\frac{1299,5}{3,141593\times0,012\times2843375}=0,008082$ (1)

*f*sen*l* ridotto per la influenza dell'aria . . . .

. . . . $\frac{90\times0,01692}{90+0,041151}=0,01691$.

Ciò posto le formole (3) e (5) danno

$$2(\delta-d)=0,006404,$$

con tenue divario dal resultato medio sperimentale. Mentre servendosi della formola (6), abbiamo

$$2(\delta-d)=0,03174,$$

quasi quintuplo del precedente.

Ad ogni modo l' aberrazione calcolata è maggiore della osservata non pure nella media ma anco nelle altre in genere. Lo che rivela una causa permanente di tale divario. Essa causa é manifestamente riposta nella formola (6) rispetto al 2.° resultato. Oltrechè vuolsi por mente alle circostanze locali, in cui le prevalenti e non lontane giocaje dell'Appennino al *Nord* dovettero certo attenuare l' effetto della forza centrifuga (2). E questo fatto può solo bastare al piccolo divario tra l'esperienza ed il calcolo della formola (5).

Del resto non è dubbio che la forza centrifuga della terra possa praticamente riconoscersi con appositi gravi cadenti da mediocri altezze. Ed ecco un nuovo argomento speri-

(1) Venturoli. Idraulica. N.° 394 e 454.

(2) L'esperienze furono fatte in Castiglione di Garfagnana situato pressochè al centro dall'alta valle del Serchio.

mentale per inferirne la rotazione diurna del nostro globo così ragionando *a posteriori*: effetti costanti non possono scompagnarsi da cause costanti. Vi debb'esser dunque una forza continua che dal Nord al Sud tende ad allontanare i corpi dall'asse della terra, e che non può altramente emanare se non dal moto diurno.

NOTE

(*a*) Questa formola, combinata coll'altra

$$(\alpha). \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{tang.}\, i = \frac{\text{sen}2l}{p} \; ([1]),$$

risolve il problema relativo alla posizione del centro di gravità terrestre. Intanto può stabilirsi *a priori* ch'esso centro giàce sull'asse di rotazione al Sud, poichè, se fosse altramente, il moto diurno non sarebbe uniforme nè l'emisfero australe meno compresso del boreale ([2]). Sia dunque in C' (fig. 1) il centro cercato si tratta di determinare CC'. Condotta la linea C'r, avremo

$$CrC' = i - \alpha \qquad \text{for. (1)}.$$

Il perchè nel triangolo rCC' son noti due angoli ed un lato onde si ottiene

$$(\beta) \qquad CC' = \frac{\text{sen}CrC'}{\text{sen}rC'C}\, Cr\, .$$

Giova dare a questa espressione forma diversa. Al qual uopo si osservi che $l = 45.°$ nelle formole (α) ed (1), importa rC'C $= 90.°$ nella formola (β). Oltrechè, avvisando alla picolezza degli angoli α ed i, emerge

([1]) Francoeur. Géodes. N.° 178

([2]) Idem. N.° 301 e 304.

$$CC' = \rho \left(\frac{1}{p} - \frac{m}{g} \rho \right)$$

E detta $\frac{1}{p}$ la compressione polare nel caso dell'omogeneità della terra (ciò che inchiude $\alpha = i$) emerge ancora

$$CC' = \rho \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right);$$

espressione più semplice ed elegante.

Per ottener poi l'esatto valore numerico di CC', la compressione $\frac{1}{p}$ dee riferirsi alle acque tranquille. Sarà dunque più conveniente assumere $\frac{1}{p} = 0{,}0032787$ desunta per Burckhardt dalle ineguaglianze lunari, e relativa all'insieme di tutta la terra. Cosicchè può ritenérsi con molta apparenza di vero che il centro di gravità di essa terra disti al sud dalla intersezione degli assi per 9884^m prossimamente E quì cade in acconcio osservare che, posta la verità di queste considerazioni, 1.° la formola (a) eccede o difetta per $l > 0 < 45°$; 2.° è possibile corregerla; ciò che importerebbe assai nella geodesia e nell'Astronomia ([1]). A tale efto si riduca $\frac{1}{p}$ alla compressione polare nel caso di $CC' = \rho$, e si aggiunga a $\frac{\text{sen}2l}{p}$ la quantità $\frac{\Delta}{\rho}\cos l$ (for. (β)) ove Δ rappresenta CC'. Resulta

([1]) Per esempio, *le distanze zenittali* sotto l'equatore, ridotte al centro della terra, eccederebbero di $8'.19''.7$, perchè la formola (a) dà $i = 0$ e la corretta

$$i = \frac{\Delta}{\rho} \frac{1}{\text{sen}1''}$$

$$i = \frac{\cos l}{\mathrm{sen} 1''}\left(\frac{\mathrm{sen} 2l}{p} + \frac{\Delta}{\rho}\right),$$

che è la formola (α) corretta.

(b) Ecco un nuovo processo sintetico molto più semplice e spedito di quelli praticati nella geodesia per la esatta determinazione di ρ.

Sia $C'r = \rho$ (fig. 1) un raggio qualunque del globo terraqueo. Detto R quello sotto l'equatore avremo

$$(\alpha') \qquad \rho + ra = \mathrm{R}.$$

Tutto riducesi adunque alla determinazione di ra. A questo intento si conduca la ordinata ap, la quale insieme con Ca intercetta un arco terrestre rq la cui piccolezza, giunta a quella della schiacciatura polare, consente

$$(\beta') \qquad ra = aq \,\mathrm{sen}\, l.$$

Or si ha dalla geometria analitica

$$ap : qp :: \mathrm{P'C} : \mathrm{PC}:$$

dalla quale si ottiene

$$aq : ap :: \mathrm{PP'} : \mathrm{P'C}.$$

E conseguentemente

$$aq = ap \frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{P'C}}.$$

Con che l'eq. (β') diviene

$$ra = \mathrm{PP'} \mathrm{sen}^2 l.$$

Onde, chiamando k la quantità $\frac{1}{2}\mathrm{PP'} = 11317$ [1] e ρ' il raggio terrestre a 45.° cioè 6365667, le formole (α') e $\mathrm{sen}^2 l = \frac{1 - \cos 2l}{2}$ (trigon.) somministrano $\rho = \rho' + k \cos 2l$.

[1] Francocur. Gèodés. N.° 300.

NOTE SUR UN THEORÊME GENERAL PAR RAPPORT A' L'ELIMINATION.

PAR. M. A. CAYLEY.

Soient

(1)
$$\varphi = (a,\ b,\ c\ldots)(x,\ y)^n = 0$$
$$\psi = (\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots)(x,\ y)^n = 0$$

deux equations homogénes quelconques entre les variables x, y, et representons par R la resultante des deux fonctions φ, ψ, de maniere que $R = 0$ sera la condition pour que les deux equations $\psi = 0$, $\varphi = 0$ puissent avoir lieu. On sait depuis long temps que les valeurs des variables x, y, que satisfaisent à la fois aux deux equations $\psi = 0$, $\varphi = 0$ sont données (*) par les conditions (equivalentes à une seule condition)

$$\frac{dR}{da} : \frac{dR}{db} : \frac{dR}{dc} \text{ et.} = x^m : mx^{m-1}y : \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}y^2 \text{ et.}$$

$$\frac{dR}{d\alpha} : \frac{dR}{d\beta} : \frac{dR}{d\gamma} \text{ et.} = x^n : nx^{n-1}y : \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}y^2 \text{ et.}$$

Ce qui suppose cependant que les coefficients a, b, c, . . α, β, λ, . . sont des quantités absolument arbitraires: les conditions dont il s' agit peuvent aussi s' ecrire sous la forme

$$\frac{dR}{da} : \frac{dR}{db} : \frac{dR}{dc} \text{ et.} = \frac{d\varphi}{da} : \frac{d\varphi}{db} : \frac{d\varphi}{dc} \text{ et.}$$

(1) L'ultima notazione adottata dall'illustre autore dalla presente nota per simboleggiare le funzioni omogenee consisterebbe nell'incrociamento delle due parentesi medie, ma qui. per mancanza di tipi si riproduce la prima. B. T.

(*). Il va sans dire que ce n'est, que la valeur de $x : y$ laquelle est determinée, mais dans la theorie des fonctions homogenes les valeurs absolues, n'importent rien; et on peut dire que les valeurs x, y sont determinées, quand $x : y$ est determinée : on evite par cette locution des longuers très-ennuyantes.

$$\frac{dR}{d\alpha} : \frac{dR}{d\beta} : \frac{dR}{d\gamma} \text{ et.} = \frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{d\beta} : \frac{d\psi}{d\gamma} \text{ et.}$$

Or M. Schläfli dans son excellent memoire (Ueber die Resultante eines systemes mehrerer algebraïscher Gleichungen) Trans. de l' Acad. de Vienne tom. IV (1852) a generalise ce theoreme de la maniere, que voici. En considerant un nombre quelconque d'equations $\psi = 0$, $\varphi = 0$, $\chi = 0$... entre le même nombre de variables $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$... et en supposant que a, b, c etc. soient des quantités qui entrent d'une manière quelconque dans la fonction φ, sans entrer dans les autres fonetions ψ, χ etc. (il n'est nullement necessaire, que le nombre des quantités a, b, c . . . soit tel, que la fonctien φ reste absolument arbitraire , le nombre des quantités a, b, c etc. peut même se reduire à 2). Mr. Schläfli fait voir que l'on a dans ce cas

$$\frac{dR}{da} : \frac{dR}{db} : \frac{dR}{dc} \text{ etc.} = \frac{d\varphi}{da} : \frac{d\varphi}{db} : \frac{d\varphi}{dc} \text{ etc.}$$

Voici en effet le raisonnement fort simple dont se sert M. Schläfli pour etablir la proposition dont il s'agit. Les equations $\psi = 0$ $\varphi = 0$ $\chi = 0$ etc. seront satisfaites par des certaines valeurs de x: y: z etc. en supposant seulment, que les quantités, a, b, c, etc. satisfaisent à la condition $R = 0$. Donc les equations $\psi = 0$ $\varphi = 0$, $\chi = 0$ etc. seront encore satisfaites en donnant des variations infiniment petites quelconques δa, δb, δc etc. aux quantités a, b, c etc. en supposant seulement que ces variations soient telles que l'on ait

$$\delta R = \frac{dR}{da}\delta a + \frac{dR}{db}\delta b + \frac{dR}{dc}\delta c + \text{etc.} = 0.$$

Or les equations $\psi = 0$, $\chi = 0$ etc. qui ne contiennent pas les quantités a, b, c etc. suffisent seules (c. a. d. sans l' aide de l' equation $\varphi = 0$) à determiner les valeurs de

$x : y : z$ etc. qui satisfaisent au systéme $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ (On suppose toujours l'equation $R = 0$) donc les nouvelles valeurs de $x : y : z$ etc. seront les mêmes qu'auparavant et l'on doit avoir

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{da}\,\delta a + \frac{d\varphi}{db}\,\delta b + \frac{d\varphi}{dc}\,\delta c + \text{etc.} = 0.$$

Savoir cette equation aura lieu en vertu de l' equation $\delta R = 0$ qui est la seule condition, à la quelle on a assujeti les variations δa, δb, δc etc. ce qui donne evidemment les conditions

$$\frac{dR}{da} : \frac{dR}{db} : \frac{dR}{dc} \text{ et.} = \frac{d\varphi}{da} : \frac{d\varphi}{db} : \frac{d\varphi}{dc} \text{ et.}$$

Cela etant, on peut encore generaliser le theoréme de M. Schläfli : pour cela je suppose, que les quantites a, b, c... entrent d'une maniere quelconque dans les fonctions φ, ψ, χ, etc. Les equations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ etc. impliquent l'equation $R = 0$, et en donnant aux quantités a, b, c etc. des variations infiniment petites quelconque δa, δb, δc etc. qui satisfaisent à la condition $\delta R = 0$, les equations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ etc. seront satisfaites à la fois, cependant par des nouvelles valeurs des variables; on peut representer par δx, δy, δz etc. les variations qu'il faut attribuer aux variables x, y, z etc. Les equations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ $\chi = 0$ etc. seront satisfaites en y variant à la fois les valeurs des variables x, y, z etc. et des quantités a, b, c etc. les variations de φ, ψ, χ etc. doivent donc s'evanouir: je represente de la maniére que voici les conditions ainsi obtenues, savoir

$$\delta\varphi + \frac{d\varphi}{dx}\,\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\,\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\,\delta z + \text{et.} = 0.$$

$$\delta\psi + \frac{d\psi}{dx}\,\delta x + \frac{d\psi}{dy}\,\delta y + \frac{d\psi}{dz}\,\delta z + \text{et.} = 0.$$

$$\delta\chi + \frac{d\chi}{dx}\delta x + \frac{d\chi}{dy}\delta y + \frac{d\chi}{dz}\delta z + \text{et.} = 0.$$

etc.

En prenant, L, M, N etc. des fonctions absolument arbitraires, et en prenant aussi

$$\delta u = - L\delta x - M\delta y - N\delta z - \text{et.}$$

on aura l'equation identique

$$\delta u + L\delta x + M\delta y + N\delta z + \text{et.} = 0$$

et en eliminant les variations δx, δy, δz etc. on obtient une equation $\square = 0$; la partie de $\square$ qui contient le terme δu sera evidemment

$$\delta u \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx}, & \frac{d\varphi}{dy}, & \frac{d\varphi}{dz} \\ \frac{d\psi}{dx}, & \frac{d\psi}{dy}, & \frac{d\psi}{dz}. \\ \frac{d\chi}{dx}, & \frac{d\chi}{dy}, & \frac{d\chi}{dz} \end{vmatrix}$$

et le determinant facteur de cette expression s'evanouit en vertu des equations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ $\chi = 0$ et. Cela est en effet un theoréme de M. Hesse, le quel se demontre tout de suite en remarquant que l'on a

$$m\varphi = x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz} + \text{et.} = 0$$

etc.

L'expression $\square$ ne contient donc pas de terme avec δu, et l' equation $\square = 0$, peut s'ecrire comme suit

$$\begin{vmatrix} & L, & M, & N, \\ \delta\varphi, & \frac{d\varphi}{dx}, & \frac{d\varphi}{dy}, & \frac{d\varphi}{dz}, \\ \delta\psi, & \frac{d\psi}{dx}, & \frac{d\psi}{dy}, & \frac{d\psi}{dz}, \\ \delta\chi, & \frac{d\chi}{dx}, & \frac{d\chi}{dy}, & \frac{d\chi}{dz}, \end{vmatrix} = 0$$

equation de la forme

$$X\delta\varphi + Y\delta\psi + Z\delta\chi + \text{et.} = 0.$$

c'est à dire une equation entre les seules variations δa, δb, δc etc. Or il ne peut pas y avoir entre ces variations d'autre equation que $\delta R = 0$, on doit donc avoir identiquement.

$$X\delta\varphi + Y\delta\psi + Z\delta\chi + \text{et.} = k\delta R$$

savoir cette equation sera satisfaite par les valeurs de x: y: z etc. qui satisfaisent à $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ etc. C'est là le theoréme qu' il s'agissait de demontrer; en supposant que les quantités a, b, c etc. n'entrent que dans la fonction φ, on a $\delta\psi = 0$, $\delta\chi = 0$ etc. C'est à dire $X\delta\varphi = k\,\delta R$, le quel est le theoréme de M. Schläfli. Je remarque que M. Schläfli a donné aussi un theoréme par rapport au discriminant d'une fonction quelconque φ, savoir en representant par ∇ ce discriminant, et en supposant, que les quantites a, b, c etc. entrent d'une maniére quelconque dans la fonction φ, les valeurs de x, y .... qui satisfaisent aux equations

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \text{ et.}$$

(les quelles impliquent l'equation $\nabla = 0$) sont données par

$$\frac{d\nabla}{da} : \frac{d\nabla}{db} : \frac{d\nabla}{dc} \text{ et.} = \frac{d\varphi}{da} : \frac{d\varphi}{db} : \frac{d\varphi}{dc} \text{ et.}$$

Cela est deja la forme la plus generale du theoréme.

London 2 Stone Buildings 12 Dec. 1856.

L'OCCULTAZIONE DI GIOVE NELLA SERA 2 GENNAJO 1857 OSSERVATA A MODENA

Come appendice alla mia Nota intorno a varie cose astronomiche, inviatale pocanzi, non le sia discara, illustre Sig. Redattore degli annali di scienze matematiche e fisiche, la comunicazione che vengo a darle del bel fenomeno dell'occultamento di Giove per la nostra Luna, avvenuto la sera del 2 Gennajo, quasi a celeste inaugurazione dell'anno corrente, e che al favore di un tempo sereno io fui lieto di poter benissimo e compiutamente osservare. Tale fenomeno ripetutosi all'intervallo di 54 giorni mi ha compensato dell'incompleta osservazione concedutami al suo primo avvenimento la notte dall'8 al 9 dell'ultimo Novembre, e che le recai a notizia nel mentovato mio scritto, al quale perciò è di convenienza che segua il presente. Ed ecco tosto i tempi o istanti, che io raccolsi con ogni fiducia di esattezza, delle immersioni osservate dei quattro Satelliti, e dei lembi precedente e seguente di Giove dietro la Luna nella detta sera 2 Gennajo.

Immersioni.	4°. Sat. a	$5^h.25^m.29^s,8$ di tempo med. a Modena		
	3°. . . .	5.	35.	0, 5
1.° lembo di Giove		5.	43.	25, 0.
2. lembo		5.	44.	51, 6
	1°. Satell.	5.	46.	14, 8
	2°. . . .	5.	47.	45, 7

All'immersione di ciascun Satellite io notai l'istante della disparizion totale di esso, avvertendo che io lo vedeva innanzi scemar sensibilmente dal pieno splendore per un poco meno di $0^s,5$. Altri osservatori hanno giudicato che questa diminuzione abbia durato due o tre secondi; ma io non seppi stimarla diversamente da quel che ho detto. Però le

immersioni medesime, e tutte riuscirono assai precise ed istantanee, il cielo essendo nettissimo da nebbie, la Luna presso il meridiano e imminente al primo suo quarto, e il cannocchiale di Fraunhofer da me adoperato avendo il pregio di una insigne chiarezza; per lo che gli appulsi o contatti alla parte oscura, benchè non visibili, della Luna non mi lasciaron alcun dubbio al giudizio delle disparizioni de' Satelliti e dei lembi del pianeta.

A prepararmi ed accertarmi del luogo preciso dell'emersioni dal lembo illuminato della Luna io usai la precauzione, altre volte da me indicata, di metter poco prima dell' occultazione il pianeta sotto il filo equatoriale della macchina paralattica e di tenervelo, riguardando poscia al punto lunare intersecato dal filo stesso in prossimità dell'emersione. Così avendo l'occhio ben fisso a quel punto ne raccolsi e determinai, quanto è possibile precisamente, gl'istanti che seguono:

Emersioni	4.° Satellite	di tempo medio a Modena
	3°.	$6^h.49^m$.
1° lembo	di Giove . . .	6. 57. 50^s.8
2° lembo	. . . .	6. 59. 10. 3
	1.° Satell. . .	7. 0. 27.
	2.°	7. 2. 19.

Atteso il vivo splendore del lembo lunare all'emersione, mi fu impossibile distinguer il 4. Satellite, se non uscito a molta distanza da esso lembo, il 3. Satellite mi fu percettibile un dieci o venti secondi dacchè n'era uscito, il 1. Satellite mi riapparve alla distanza o dopo sei o otto secondi, e il 2. circa a quella di quattro a sei secondi. Però le emersioni, dei due lembi di Giove mi sembraron giudicate sensibilmente agl'istanti veri del fenomeno, avvegnacche nel contatto e al confronto delle immagini luminose quella di Giove mi apparisse tanto sbiavita e scolorata dalla fulgen-

tissima e bianca della Luna, che la prima ne aveva somiglianza di una larva oscura e superficiale, anzichè di un globo illuminato e compatto. Discostatosi poi alquanto il pianeta dalla Luna, e vedendosi entrambi nel campo del cannocchiale, vi splendeva quello di un giallo d' oro pallido e questa di un bianco d'argento agli orli vivacissimo.

Notai da ultimo e ad occultazion terminata del Sistema Gioviale che il 1. Satellite erasi di molto àvvicinato al disco del pianeta; ed io lo distinsi ancora per alcun tempo in immediato contatto col medesimo; tanta è la nettezza delle immagini visive nel mio cannocchiale con ingrandimento di 180. Movendosi il detto Satellite da Oriente a Occidente, esso veniva per noi alla congiunzion inferiore, e sarà stato poco appresso proiettato dal raggio visuale sopra il disco del pianeta, se pure lentamente non radevane il lembo verso il polo boreale.

Chiudo questa breve relazione ricordando che una stella di prima grandezza, emergente in caso d'occultazione dal lembo più fortemente chiaro della Luna di poco ne perde al confronto la vivacità del proprio splendore, tuttochè la medesima non abbia per noi alcun diametro sensibile. Giove per contrario nelle stesse circostanze impallidisce e scolora fin quasi a disparircene, benchè ad aria scura e serena, isolato ed alto nel cielo ci appaja poco men risplendente di Venere. Ma esso ci offre un disco di presso ad un minuto primo di diametro; e tanta poi e la differente intensità della luce diretta e siderea e della luce riflessa e planetaria, comechè quella rispetto a questa inviataci da distanza incomparabilmente maggiore. Da ciò si desume quanto grande esser deve l'assorbimento o la perdita della luce del nostro Sole nel suo ripercuotersi alla superficie dei pianeti.

Modena, 6 Febbrajo 1857.

INTORNO AL TEOREMA DI BUDAN.

NOTA

DI ANGELO GENOCCHI

È noto che Budan pubblicando nel 1807 il suo teorema lo dimostrava per le sole equazioni non contenenti radici immaginarie, e si serviva a tal uopo della regola di Cartesio intorno ai segni; e che poi ne presentò all'Istituto nel 1811 una dimostrazione generale approvata sopra la relazione di Lagrange e Legendre ma rimasta inedita e forse perduta. In questo scritto mi propongo di far vedere che principii non dissimili da quelli da cui si suole dedurre la regola Cartesiana valgono a dimostrare generalmente il teorema di Budan, e che dagli stessi principii si trae un teorema affine, nel quale le differenze successive sono sostituite alle derivate, senza dover ammettere le limitazioni introdotte dal signor Emilio Mathieu in un recente articolo degli *Annali* del Terquem (1856 pag. 429), limitazioni che toglierebbero al teorema gran parte della sua importanza.

1. Premetto due lemmi, che sono facili ampliazioni di quelli usati da Gauss e da Cauchy nelle loro dimostrazioni della regola dei segni, e che in egual modo si provano.

Lemma I. Siano $m+1$ quantità

$$a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ a_m \qquad (1),$$

e se ne deducano altre $m+2$ quantità

$$A_0\,,\ A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots\ A_m\,,\ A_{m+1} \qquad (2),$$

ponendo

$$A_0 = \theta_0 a_0\,,\ A_1 = a_0 + \theta_1 a_1\,,\ A_2 = a_1 + \theta_2 a_2\,,\ \ldots$$
$$A_m = a_{m-1} + \theta_m a_m\,,\ A_{m+1} = a_m \qquad (3),$$

dove θ_0, θ_1, θ_2, . . . θ_m sono coefficienti tutti dello stesso segno. Supposto che questi coefficienti siano negativi, il numero delle *variazioni* di segno presentate dalla serie (2) deve superare quello delle *variazioni* della serie (1).

I termini della serie (1) possono essere positivi o negativi, e alcuni di essi possono anche supporsi nulli ma intendiamo che non sia tale l' ultimo termine. Quando uno o più termini sono nulli, si può attribuir loro un segno a piacimento, e allora il numero delle variazioni della serie (1) sarà diverso secondo la scelta di tali segni per modo che avrà un *massimo* e un *minimo* che il Cauchy nella sua *Analyse algébrique*, pag. 515, insegna a determinare. Il Lemma si applica al numero *effettivo* delle variazioni che costituisce il *minimo*, ma resta vero anche pel *massimo*, e così il numero massimo delle variazioni della serie (2) eccederà sempre il numero massimo delle variazioni della serie (1): imperocchè ai termini nulli della prima serie si possono sostituire altri termini positivi o negativi in guisa che il numero delle variazioni sia portato al suo massimo v; allora la serie (2) avrà più di v variazioni, e benchè qualche suo termine possa annullarsi quando si rimettono i termini nulli della serie (1), pure il numero delle variazioni della serie (2) potrà crescere ma non già scemare dovendo esser recato al massimo, e rimarrà quindi superiore a v.

Lemma II. All'incontro, se i coefficienti θ_0, θ_1, . . . θ_m sono tutti positivi, il numero massimo delle variazioni della serie (2) non eccederà mai il numero massimo delle variazioni della serie (1).

Di questi due lemmi ciascuno è un corollario dell'altro: così supposto vero il primo se ne deduce agevolmente il secondo. Infatti vediamo che al numero massimo delle variazioni corrisponde il numero minimo delle *permanenze*, onde se questi numeri siano v e p nella serie (1), v' e p' nella serie (2), si avrà $v + p = m$, $v' + p' = m + 1$. Ora se

cangisi il segno a tutti i termini d'indice impari nella serie (1), e a tutti quelli d'indice pari nella serie (2), il numero minimo delle permanenze diverrà in ciascuna serie il numero minimo delle variazioni, e però si otterranno due nuove serie tali che il numero minimo delle variazioni sarà p nella prima, p' nella seconda. Ma le equazioni (3) si posson mettere sotto la forma:

$$-A_0=-\theta_0 a_0,\quad A_1=a_0-\theta_1(-a_1),\quad -A_2=-a_1-\theta_2 a_2,\quad \text{ecc.},$$

e supposti positivi $\theta_0, \theta_1, \ldots$, saranno negativi $-\theta_0, -\theta_1, \ldots$: adunque potremo applicare alle due nuove serie il lemma I, e ne risulterà $p' > p$, sicchè a causa dell'equazione $v' + p' = m + 1 = v + p + 1$ dovrà essere $v' < v + 1$, ossia v' non $> v$.

2. Consideriamo una funzione intera $f(x)$ del grado m, e le sue derivate successive, formando la serie

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^m(x) \qquad (4):$$

il numero massimo delle variazioni di questa serie non può crescere quando da un valore x della variabile si passa ad un valore poco maggiore $x+\varepsilon$. Perocchè si può supporre ε così piccolo che la differenza $f(x+\varepsilon) - f(x)$ abbia il segno del suo primo termine $\varepsilon f'(x)$, e che ogni altra differenza $f^n(x+\varepsilon) - f^n(x)$ abbia pure il segno del suo primo termine $\varepsilon f^{n+1}(x)$: quindi facendo

$$f(x+\varepsilon)=f(x)+\theta_1 f'(x)\ ,\ f^n(x+\varepsilon)=f^n(x)+\theta_{n+1} f^{n+1}(x)$$

si potranno supporre $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_m$ tutti positivi; inoltre essendo $f^m(x)$ costante si avrà $f^m(x+\varepsilon) = f^m(x)$, e se taluna $f^{i+1}(x)$ delle derivate sia nulla, si potrà per la picciolezza di ε supporre $f^i(x+\varepsilon) = f^i(x)$: sarà dunque applicabile il lemma II, e perciò il numero massimo delle variazioni della serie (4) non sarà maggiore pel valore $x+\varepsilon$ di quello che sia pel valore x, se anche nel cambiare x in

$x+\varepsilon$ si aggiunga in capo della serie un termine $A_0 = \theta_0 f(x)$ con θ_0 positivo, nè crescerà perchè manchi questo termine.

Aumentando x per gradi piccolissimi da un valor dato $x=\alpha$ insino ad un valor maggiore qualsivoglia $x=\beta$, si vedrà dunque che il numero massimo delle variazioni della serie (4) non cresce da un grado all'altro contiguo e quindi non cresce da α a β.

Similmente per mezzo del lemma I si dimostrerebbe che lo stesso numero non decresce nel passaggio dal valore $x=\beta$ al valor minore $x=\alpha$.

3. Sia sempre $\beta > \alpha$, e chiamata g una quantità compresa tra α e β, si faccia $F(x) = (x-g)\,f(x)$, e con le derivate successive di $F(x)$ si formi la serie

$$F(x)\,,\; F'(x)\,,\; F''(x)\,,\; \ldots\; F^m(x)\,,\; F^{m+1}(x) \qquad (5).$$

In ciascuna delle serie (4) e (5) il numero massimo delle variazioni che corrispondono ad $x=\alpha$ eguaglierà o eccederà quello delle variazioni che corrispondono ad $x=\beta$: si chiami E questo *eccesso* nullo o positivo nella serie (4). L'eccesso appartenente alla serie (5) non sarà minore di $E+1$.

Perocchè avremo

$$F'(x)=f(x)+(x-g)f'(x)\,,\; F''(x)=2f'(x)+(x-g)f''(x),\ldots$$

$$F^m(x) = mf^{m-1}(x) + (x-g)f^m(x),\; F^{m+1}(x) = (m+1)f^m(x),$$

e il coefficiente $x-g$ sarà negativo per $x=\alpha$, positivo per $x=\beta$ onde fatto $x-g=\theta_0=\theta_1=2\theta_2=\ldots=m\theta_m$, e divisi per $1, 1, 2, \ldots m, m+1$ i termini della serie (5), è chiaro pel lemma I che il numero massimo delle variazioni della stessa serie eccederà per $x=\alpha$ quello della serie (4), e pel lemma II, che non lo eccederà per $x=\beta$: l'eccesso appartenente alla serie (5) supererà dunque l'eccesso che corrisponde alla serie (4), e così sarà almeno $E+1$.

Se introducansi altre quantità g', g'', g''', . . . , eguali o no, parimente comprese tra i limiti α e β, e se si moltiplica $F(x)$ per gli altri binomii $x - g'$, $x - g''$, $x - g'''$, ... , l'eccesso E andrà crescendo e diverrà almeno $E+2$, $E+3$,... e in generale $E + n$ dopo l'introduzione di n nuovi fattori binomii.

Sia pertanto $f(x) = 0$ un'equazione che non abbia radici tra α e β: dopo l'introduzione di n radici comprese tra questi limiti l'eccesso E sarà accresciuto almeno di n unità, e quindi il nuovo eccesso non sarà minore di n. Si concluda che per ogni equazione $f(x) = 0$ il numero delle radici eguali o disuguali comprese tra due limiti α e β non supera mai l'aumento che riceve il numero massimo delle variazioni della serie (4) quando x passa dal limite superiore β all'inferiore α.

Si può aggiungere che se il numero delle radici è minore d'un tale aumento, la differenza sarà un numero pari. Ciò si proverà facilmente osservando che A_0 ha segno opposto ad a_0 nel caso del lemma I e segno eguale nel caso del lemma II, e che quindi la differenza tra il numero delle variazioni della serie (1) e quello della serie (2) è impari nel primo caso e nulla o pari nel secondo.

Questo è il teorema di Budan che Fourier ha dimostrato in modo diverso nella sua *Analyse des équations*. La dimostrazione precedente sembra più semplice: il caso dell'annullamento di qualche derivata non abbisogna di spiegazioni peculiari, poichè si tratta del numero massimo di variazioni e sempre si sa determinarlo.

4. Attribuita ad x la differenza costante e positiva $\Delta x = h$, passiamo a considerare la serie

$$f(x)\ ,\ \Delta f(x-h)\ ,\ \Delta^2 f(x-2h)\ ,\ .\ .\ .\ \Delta^m f(x-mh) \qquad (6).$$

Sarà

$$\Delta f(x-h) = f(x) - f(x-h),$$

e quindi prendendo le differenze successive

$$\Delta f(x-h)=\Delta f(x)-\Delta^2 f(x-h),\ \Delta^2 f(x-2h)=\Delta^2 f(x-h)-\Delta^3 f(x-2h)$$

$$\Delta^3 f(x-3h)=\Delta^3 f(x-2h)-\Delta^4 f(x-3h),\ \text{ecc.},$$

inoltre essendo $\Delta^m f(x)$ costante si avrà

$$\Delta^m f(x-mh)=\Delta^m f(x-mh+h).$$

Adunque la serie (6) equivale alla seguente

$$f(x)\,,\ \Delta f(x)-\Delta^2 f(x-h)\,,\ \Delta^2 f(x-h)-\Delta^3 f(x-2h)\,,\dots$$
$$\Delta^{m-1} f(x-mh+2h)-\Delta^m f(x-mh+h)\,,\ \Delta^m f(x-mh+h):$$

se $f(x)$ ha lo stesso segno di $-\Delta f(x)$, questa serie pel lemma I conterrà più variazioni che l'altra

$$\Delta f(x)\,,\ \Delta^2 f(x-h)\,,\ \Delta^3 f(x-2h)\,,\ \dots\ \Delta^m f(x-mh+h)\,,$$

e quindi ne conterrà un numero àlmeno eguale nel caso contrario. Ora aggiungendo in capo all'ultima serie il termine $f(x)$, le aggiungiamo una variazione quando $f(x)$ ha il segno di $-\Delta f(x)$ e nel caso contrario una permanenza: dunque in ambedue i casi la serie (6) avrà *almeno* tante variazioni quante la seguente

$$f(x)\,,\ \Delta f(x)\,,\ \Delta^2 f(x-h)\,,\ \Delta^3 f(x-2h)\,,\ \dots\Delta^m f(x-mh+h)\,,\ (6').$$

Ma

$$\Delta^2 f(x-h)=\Delta^2 f(x)-\Delta^3 f(x-h),$$

$$\Delta^3 f(x-2h)=\Delta^3 f(x-h)-\Delta^4 f(x-2h)\,,\ \text{ecc.},$$

e però la serie (6') contiene tante variazioni quante ne presentano insieme le due: $f(x)$, $\Delta f(x)$, e

$$\Delta f(x)\,,\ \Delta^2 f(x)-\Delta^3 f(x-h)\,,$$
$$\Delta^3 f(x-h)-\Delta^4 f(x-2h)\,,\ \dots\ \Delta^m f(x-mh+2h).$$

La seconda di queste presenterà pel lemma I più variazioni che la serie

$\Delta^2 f(x)$, $\Delta^3 f(x-h)$, $\Delta^4 f(x-2h)$, . . . $\Delta^m f(x-mh+2h)$,

se $\Delta\ f(x)$ avrà lo stesso segno di $-\Delta^2 f(x)$, e almeno altrettante nel caso contrario; d'altra parte l'ultima serie accresciuta del termine $\Delta f(x)$ anteposto a tutti gli altri acquisterà una variazione quando $\Delta f(x)$ e $-\Delta^2 f(x)$ hanno egual segno e nel caso contrario una permanenza: dunque in tutti i casi la serie (6') conterrà almeno tante variazioni quante le due serie insieme $f(x)$, $\Delta f(x)$, e

$$\Delta f(x)\ ,\ \Delta^2 f(x)\ ,\ \Delta^3 f(x-h)\ ,\ .\ .\ .\ \Delta^m f(x-mh+2h)\ ,$$

ossia quante la serie unica

$$f(x),\ \Delta f(x),\ \Delta^2 f(x),\ \Delta^3 f(x-h),\ .\ .\ .\ \Delta^m f(x-mh+2h) \qquad (6'').$$

Da questa passeremo similmente all'altra

$$f(x)\ ,\ \Delta f(x)\ ,\ \Delta^2 f(x)\ ,\ \Delta^3 f(x)\ ,\ \Delta^4 f(x-h)\ ,\ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .\ \Delta^m f(x-mh+3h) \qquad (6'''),$$

e proseguendo di mano in mano riusciremo infine alla serie

$$f(x)\ ,\ \Delta f(x)\ ,\ \Delta^2 f(x)\ ,\ .\ .\ .\ \Delta^m f(x) \qquad (7);$$

onde concluderemo che la serie (6) per qualsivoglia valor individuato di x contiene *almeno* tante variazioni quante ne presenta la serie (7).

5. Il numero massimo delle variazioni della serie (7) non può crescere nel passaggio dal valore x al valor maggiore $x+h$. Poichè si ha

$$f(x+h)=f(x)+\Delta f(x)\ ,\ \Delta f(x+h)=\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)\ ,$$
$$\Delta^2 f(x+h)=\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x)\ ,\ .\ .\ .\ \Delta^{m-1} f(x+h)=\Delta^{m-1} f(x)+\Delta^m f(x),$$
$$\Delta^m f(x+h)=\Delta^m f(x)\ ,$$

e quindi il cambiamento di x in $x+h$ produce una nuova serie nella quale il numero massimo delle variazioni pel lemma II non eccede quello della serie (7) ancorchè a quella si aggiunga per primo termine $f(x)$.

Adunque il nnmero massimo delle variazioni della serie (7) neppure crescerà nel passaggio da $x + h$ ad $x + 2h$, da $x+2h$ ad $x+3h$, ecc.; e generalmente non crescerà nel passaggio dal limite $x = \alpha$ al limite superiore $x = \beta$, se la differenza di questi due limiti sia moltiplice di h.

Nella stessa ipotesi il numero massimo delle variazioni che presenterà la serie (7) per $x = \beta$ non potrà superare quello della serie (6) per $x = \alpha$, poichè questo (pel num. preced.) non sarà inferiore a quello della serie (7) per lo stesso valore $x = \alpha$.

6. Se in luogo di prendere $\Delta x = h$, supponiamo $\Delta x = - h$. fatto $u_0 = f(x)$, la nota formola

$$\Delta^n u_0 = u_n - n u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \ldots \pm f(x)$$

ci darà

$$\Delta^n f(x) = f(x-nh) - nf(x-nh+h) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(x-nh+2h) - \ldots$$
$$\pm f(x):$$

ora nell'ipotesi di $\Delta x = h$, fatto $u_0 = f(x - nh)$, si avrebbe dalla stessa formola

$$\Delta^n f(x-nh) = f(x) - nf(x+h) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(x-nh+2h) - \ldots$$
$$\pm f(x-nh);$$

onde si vede che $\Delta^n f(x - nh)$ preso nell'ipotesi di $\Delta x = h$ eguaglia $(-1)^n \Delta^n f(x)$ preso nell'ipotesi di $\Delta x = -h$, e quindi ha lo stesso segno di $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ preso pure con $\Delta x = -h$.

Ne risulta che la serie (6) equivale pei segni alla seguente

$$f(x), \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}, \ldots \frac{\Delta^m f(x)}{\Delta x^m} \qquad (8)$$

purchè in questa si supponga $\Delta x = -h$. D'altra parte è

manifesto che se supponiamo $\Delta x = h$, i segni della serie (8) saranno eguali a quelli della serie (7).

Possiamo da ciò conchiudere che il numero massimo delle variazioni della serie (8) non cresce nel passaggio dall'ipotesi $x = \alpha$, $\Delta x = -h$ all'altra ipotesi $x = \beta$, $\Delta x = h$, e che quindi deve nella prima ipotesi presentare un eccesso nullo o positivo E.

Sia g una quantità compresa tra α e β, e posto $F(x) = (x-g)f(x)$, formiamo la serie

$$F(x)\,,\ \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}\,,\ \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}\,,\ \ldots\ \frac{\Delta^m F(x)}{\Delta x^m}\,,\ \frac{\Delta^{m+1} F(x)}{\Delta x^{m+1}} \qquad (9):$$

per la sostituzione della serie (9) alla serie (8) l'eccesso E diverrà almeno $E+1$.

Infatti avremo

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x) + (x - g + \Delta x)\,\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\,,$$

$$\frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2} = 2\,\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + (x - g + 2\Delta x)\,\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}\,,\ \ldots$$

$$\ldots\ \frac{\Delta^m F(x)}{\Delta x^m} = m\,\frac{\Delta^{m-1} f(x)}{\Delta x^{m-1}} + (x - g + m\Delta x)\,\frac{\Delta^m f(x)}{\Delta x^m}\,,$$

$$\frac{\Delta^{m+1} F(x)}{\Delta x^{m+1}} = (m+1)\,\frac{\Delta^m f(x)}{\Delta x^m}\,,$$

e i coefficienti $x-g+\Delta x$, $x-g+2\Delta x$, ... $x-g+m\Delta x$ saranno tutti negativi nel caso di $x=\alpha$, $\Delta x=-h$, e tutti positivi in quello di $x=\beta$, $\Delta x = h$; dunque il numero massimo delle variazioni della serie (9) dovrà nel primo caso (lemma I) eccedere quello della serie (8), e non lo eccederà nel secondo (lemma II); dunque il corrispondente eccesso sarà maggiore per la serie (9) che per la serie (8).

8. Quindi se nell'equazione $f(x) = 0$ s'introduce una radice g compresa tra α e β l'*eccesso* che corrisponde alla

funzione $f(x)$ diviene almeno $E + 1$. Introdotte altre radici g', g'', . . . comprese tra gli stessi limiti, un tale eccesso sarà di mano in mano eguale o superiore ad $E + 2$, $E + 3$, . . . , per modo che dopo l'introduzione di n radici non sarà minore di $E + n$, e conseguentemente sarà almeno n.

Adunque il numero delle radici che un'equazione $f(x)=0$ possiede tra i limiti α e β, se $\beta - \alpha$ è positivo e moltiplice di h, non è mai maggiore dell' aumento che riceve il numero massimo delle variazioni della serie (8) quando si passa da $x = \beta$, $\Delta x = h$ ad $x = \alpha$, $\Delta x = -h$.

Si può aggiungere che ogni qual volta siffatto aumento superi il numero delle radici comprese tra α e β, la differenza sarà un numero pari, dappoichè l'ultimo termine della serie (9), ha sempre il medesimo segno dell' ultimo della serie (8) e invece il primo termine della serie (9) ha il medesimo segno del primo della serie (8) nel caso di $x=\beta$ e il segno contrario nel caso di $x = \alpha$.

Vedesi come questo teorema sia per le differenze ciò che il teorema di Budan é per le derivate. Il signor Mathieu è obbligato a confrontare non due ma quattro serie di segni e a diminuire h insino a che la prima serie si accordi con la seconda, e la terza con la quarta.

Alla serie (8) si potrà sostituire la serie (6) rispetto al limite $x = \alpha$, e la serie (7) rispetto al limite $x = \beta$, e allora si dovrà far sempre $\Delta x = h$.

9. Supposta u_x una funzione intera del grado m e u il suo valore per $x = 0$, si ha

$$u_x = u + \frac{x}{h}\Delta u + \frac{x(x-h)}{1.2h^2}\Delta^2 u + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x(x-h)(x-2h)\ldots(x-mh+h)}{1.2.3.\ldots mh^m}\Delta^m u,$$

nota formola d'interpolazione ove $\Delta x = h$: cambiando h in

in — h, e intendendo che le differenze successive siano determinate con $\Delta x = -h$, se ne deduce

$$u_x = u - \frac{x}{h}\,\Delta u + \frac{x(x+h)}{1.2h^2}\,\Delta^2 u - \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{x(x+h)\ \ldots\ (x+mh-h)}{1.2.\ \ldots\ mh^m}\,\Delta^m u$$

Fatto quindi per compendio

$$\frac{x(x+h)\ \ldots\ (x+nh-h)}{1.2\ \ldots\ nh^n} = (x)_n\,,$$

il polinomio $f(x)$ potrà ordinarsi pei *fattoriali* $(x)_n$ e prenderà la forma

$$A_0 + A_1(x)_1 + A_2(x)_2 + \ldots + A_m(x)_m.$$

Il coefficiente ultimo A_m sarà lo stesso numero che risulterebbe per coefficiente di x^m nel medesimo polinomio ordinato secondo le potenze x^n; perciò se assegnasi ad x un valore numericamente si grande che $f(x)$ ordinato per le potenze di x abbia il segno stesso del suo termine più elevato, si potrà eziandio far collimare il segno di $f(x)$ con quello di $A_m(x)_m$, poichè $(x)_m$ è positivo come x^m se x è tale, e ritiene il segno stesso di x^m, se x è negativo ma supera in valor assoluto $(m-1)h$.

Ora preso $\Delta x = -h$, abbiamo

$$\Delta(x)_n = -(x)_{n-1}\,,\ \Delta^2(x)_n = (x)_{n-2}\,,\ \Delta^3(x)_n = -(x)_{n-3}\,,\ \text{etc.}$$

e quindi generalmente

$$\frac{\Delta^i(x)_n}{\Delta x^i} = \frac{(x)_{n-i}}{h^i}\ ;\ \text{di più}\ \frac{\Delta^n(x)_n}{\Delta x^n} = \frac{1}{h^n}\,.$$

Preso invece $\Delta x = h$, abbiamo

$$\Delta(x)_n = (x+h)_{n-1}\,,\ \Delta^2(x)_n = (x+2h)_{n-2}\,,\ \text{ecc.}$$

onde

$$\frac{\Delta^i (x)_n}{\Delta x^i} = \frac{(x + nh)_{n-i}}{h^i} \qquad \frac{\Delta^n (x)_n}{\Delta x^n} = \frac{1}{h^n}.$$

È dunque chiaro che i termini della serie (8) riesciranno ordinati per fattoriali, che saranno tutti della forma $(x)_n$ nel caso di $\Delta x = -h$, e che nel caso di $\Delta x = h$ il fattoriale più elevato sarà $(x)_m$ in $f(x)$, e $(x + nh)_{m-n}$ in $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$. Intanto si potranno determinare due limiti $x = L$, $x = -L'$, l'uno positivo e l'altro negativo, per ciascun de' quali ognuna delle funzioni (8) abbia il segno del termine contenente il fattoriale più elevato, supponendo $\Delta x = -h$ per $x = -L'$ e $\Delta x = h$ per $x = L$. Allora la serie (8) presenterà per $x = L$ sole permanenze e per $x = -L'$ sole variazioni, il cui numero quindi sarà m: essa dunque perderà m variazioni da $x = -L'$ ad $x = L$, quante sono tra reali ed immaginarie le radici dell'equazione $f(x) = 0$.

Per $x = 0$, $\Delta x = -h$, si annullano il fattoriale $(x)_n$ e le sue differenze successive sino a $\frac{\Delta^n (x)_n}{\Delta x^n}$ che è costante e positivo; quindi la serie (8) si riduce alla A_0, A_1, A_2, ... A_m. Non presentando alcuna variazione la medesima serie per $x = L$, $\Delta x = h$, si concluderà che il numero delle radici positive dell' equazione $f(x) = 0$ non può superare quello delle variazioni che presentano i coefficienti del suo primo membro ordinato pe' fattoriali $(x)_n$. Regola simile a quella di Cartesio che può dedursene supponendo $h = 0$.

L'espressione di u_x mediante i fattoriali $(x)_n$ non è altro che la formola (D) del signor Mathieu (N.A. 1856 pag. 412), già data dal signor Desboves nello stesso giornale (1854, pag. 65), e compresa in una formola più generale di La-

place da lui ricordata (ivi, p. 71). La formola $u_n = (1 - \Delta u^{-1})^{-n}$ di cui fa uso il Mathieu (l. c. p. 413) è la medesima che il Cauchy dimostrò nei *Comptes rendus*, tom. XIX, pag. 1186 e notò col numero (11). Del resto si è veduto che occorre soltanto mutare il segno di h nella ordinaria formola d'interpolazione. Parimente la formola simbolica

$$h^n f^n(x) = \left[- l(1 - \Delta) \right]^n,$$

che il Signor Desboves crede nuova (l. c. p. 69), si deduce dalla Lagrangiana

$$h^n f^n(x) = \left[l(1 + \Delta) \right]^n$$

col solo cambiare h in $-h$, supponendo anche $\Delta x = -h$.

10. Si chiami r il numero delle variazioni perdute dalla serie (8) nel passaggio da $x = \alpha$, $\Delta x = -h$ ad $x = \beta$, $\Delta x = h$, e sia $\alpha < L'$, $\beta < L$. Si perderanno $m - r$ variazioni ne'due passaggi da $x = -L'$, $\Delta x = -h$ ad $x = \alpha$, $\Delta x = -h$, e da $x = \beta$, $\Delta x = h$ ad $x = L$, $\Delta x = h$, e non se ne perderanno meno di $m - r$ da $x = -L'$, $\Delta x = -h$ ad $x = \alpha$, $\Delta x = h$, e da $x = \beta$, $\Delta x = -h$ ad $x = L$, $\Delta x = h$, poichè per $\Delta x = -h$ le variazioni sono tante *almeno* quante per $\Delta x = h$, rimanendo eguale x. Il numero delle radici comprese tra $-L'$ ed α, e tra β ed L non eccederà le variazioni perdute in questi intervalli; onde se v è il numero di queste variazioni perdute, e s quello delle radici comprese tra α e β, si avrà v non $< m - r$, s non $> r$, e quando si trovi $s + v < m$, l'equazione proposta avrà certamente $m - (s + v)$ radici immaginarie, avendone sole s reali fra i limiti α e β, e non più di v reali fuori di questi limiti.

Nel caso del teorema di Budan, si ha $h = 0$, e $v = m - r$, talchè quando s è $< r$ l'equazione deve contenere $r - s$ radici immaginarie che aggiunte alle s reali compiono il

numero r delle radici indicate fra i limiti α e β, e che Fourier nomina *deficienti* relativamente a siffatti limiti. Presenta dunque un vantaggio il teorema di Budan sopra quello del num. 8 poichè in esso le variazioni perdute accusano sempre radici o reali o immaginarie.

11. Aggiungo alcune altre conseguenze del teorema di Budan. Se un valore $x = g$ che non sia radice dell'equazione $f(x) = 0$ annulla una o più derivate di $f(x)$, e sia $f^n(x)$ la derivata che le segue immediatamente e che non si annulla; preso un numero ε infinitesimo positivo, si avrà prossimamente

$$f^{n+i}(g \pm \varepsilon) = \frac{(\pm \varepsilon)^i}{2.3. \ldots i} f^n(g)$$

quindi tali derivate avranno tutte per $x = g + \varepsilon$ il medesimo segno, eguale a quello di $f^n(g)$, ma per $x = g - \varepsilon$ avranno segni alterni e l'ultima $f^{n-1}(x)$ avrà segno contrario a quello di $f^n(g)$; d'altra parte le funzioni che non si annullano per $x = g$ conserveranno per $x = g + \varepsilon$ il segno che hanno per $x = g - \varepsilon$. Adunque per contar le variazioni della serie (4) nel caso di $x = g - \varepsilon$ si fa $x = g$ e si supplisce ai termini nulli con segni alterni di cui l'ultimo è contrario al segno del termine seguente, e nel caso di $x = g + \varepsilon$ si pone questo stesso segno in luogo di ciascun termine nullo. Ciò si chiama da Fourier *regola del doppio segno*, e riducesi a considerare per $x = g - \varepsilon$ il numero *massimo* e per $x = g + \varepsilon$ il numero *minimo* delle variazioni presentate dalla serie nel caso di $x = g$. Sia r la differenza di questi due numeri: l'equazione non avrà più di r radici reali tra $g - \varepsilon$ e $g + \varepsilon$, e poichè non ne ha veruna, conterrà invece r radici immaginarie. Così l'annullamento di due o più termini della serie (4), e anche d'un solo interposto a due d'ugual segno, manifesta la presenza di radici immaginarie: per converso non vi ha coppia di

radici immaginarie a cui non corrisponda alcuna di tali lacune nella serie, poichè se qualche variazione si perde senza che le corrisponda una radice reale, deve annullarsi alcuna delle derivate, rimanendo invariabili i segni se niuna di esse si annulla. E insieme si vede che alle radici immaginarie della proposta corrispondono sempre radici reali d'una o più delle sue derivate

Per $x = 0$, i termini della serie (4) divengono i coefficienti dell'equazione $f(x) = 0$, e quindi fatto $g = 0$ si giunge a parecchi teoremi noti (*Nouv. Ann. de Math.*, tom. V, pag. 334-338).

Se g è radice di $f(x) = 0$, ma non di $f'(x) = 0$, la proposta avrà questa sola radice tra $g - \varepsilon$ e $g + \varepsilon$, e però vi saranno $r - 1$ radici immaginarie. Se infine si annullano anche le n derivate $f'(g)$, $f''(g)$, ... $f^n(g)$, vi saranno $n + 1$ radici eguali a g tra $g - \varepsilon$ e $g + \varepsilon$, e l'equazione avrà $r - n - 1$ radici immaginarie.

12. Sia r il numero delle variazioni perdute dalla serie (4) fra i limiti α e β, e r' il numero di quelle che perde fra gli stessi limiti la medesima serie quando si toglie il primo termine $f(x)$: la differenza tra r ed r' sarà zero o 1, secondo che $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ e $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ avranno eguali od opposti segni. Ora se l' equazione $f'(x) = 0$ ha s radici reali tra α e β che rendono eguali i segni di $f(x)$ e $f''(x)$, l'equazione $f(x) = 0$ perderà in prossimità di ciascuna di esse una coppia di radici reali, e perciò acquisterà $2s$ radici immaginarie; di più, tanto l'una quanto l'altra equazione perderà due radici reali per ogni lacuna simile nel resto della serie e acquisterà un numero corrispondente di radici immaginarie che dinoterò con $2s'$. Quindi fra i limiti α e β, la derivata $f'(x) = 0$ avrà $2s'$ radici *deficienti*, $r' - 2s'$ radici reali; e la proposta $f(x) = 0$ avrà $2s + 2s'$ radici *deficienti*, $r - 2s - 2s'$ radici reali.

Preso $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$, si ha $r = m$, $r' = m - 1$, e però $2s'$ è il numero totale delle radici immaginarie della derivata, $2s + 2s'$ il numero totale delle radici immaginarie della proposta. Questa dunque ha tante coppie di radici immaginarie quante ne ha la sua derivata, e di più tante altre qnante sono le radici reali della derivata che rendono eguali i segni di $f(x)$ e $f''(x)$: teorema dell' Abb. Deguà.

È facile vedere i cambiamenti da farsi nel caso in cui qualche radice reale della $f'(x) = 0$ rende nulla $f''(x)$ o $f(x)$.

13. Supposta g una quantità positiva, e fatto, come nel num. 3, $F(x) = (x-g)f(x)$, chiamiamo v il numero *minimo* o effettivo dalle variazioni che presentano i coefficienti del polinomio $f(x)$: quello che corrisponde al polimonio $F(x)$ eccederà v d'un numero impari $2k + 1$. Inoltre, preso un numero positivo infinitesimo ε, chiamiamo r il numero delle variazioni perdute dalla serie (5) nel passaggio da $x = -\varepsilon$ ad $x = +\varepsilon$, e r' il numero di quelle ch' essa perde da $x = -\infty$ ad $x = -\varepsilon$: da $x = +\varepsilon$ ad $x = \infty$ la medesima serie perderà $v + 2k + 1$ variazioni poichè per $x = +\varepsilon$ si ottiene il numero *minimo* delle variazioni corrispondenti ad $x = 0$, cioè $v + 2k + 1$, e per $x = \infty$ risultano sole permanenze. Sarà quindi $v + 2k + 1 + r + r' = m + 1$, onde $m - r' - v = r + 2k$. Ma l'equazione $f(x) = 0$, se non ha radici nulle, non avrà alcuna radice tra $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$; di più essa non ne avrà più di v tra $+\varepsilon$ e $+\infty$, e finalmente, tra $-\infty$ e $-\varepsilon$ non ne avrà più dell'equazione $F(x) = 0$ la quale non può averne più di r': laonde l'equazione $f(x) = 0$ avrà almeno $m - r' - v$ radici immaginarie. Adunque il numero delle sue radici immaginarie è almeno $r + 2k$.

Si noti che r è la differenza tra il numero *massimo* e il *minimo* delle variazioni presentate dal polinomio $F(x)$.

Questo teorema è più completo di quello che si trova nel tom. V degli *Annali* del Terquem, pag. 116 (V. anche, ivi pag. 242, e pag. 339 nota).

INDICE DEGLI ARTICOLI

ELENCO DELLE TAVOLE

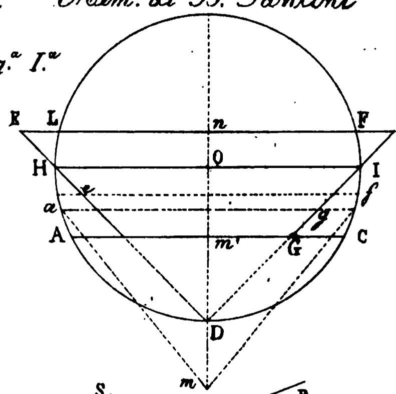
				ERRATA	CORRIGE
				ERRORI	
pag.	33	lin.	5	$-i^2 \sin\theta \cos\theta \cos\lambda \sin v_1 \sin(v_1-\lambda)$	
				CORREZIONI	
				$-i^2 \sin\theta \cos\theta \cos\lambda \sin v_1 \sin(v_1-\lambda)$	
				$-i^2 \sin\theta \cos\theta \sin^2(v_1-\lambda)$	
»	34	»	17	$(1+\cos2\lambda)$	$(3+\cos2\lambda)$
»	»	»	19	$\left(1-\frac{i^2}{2}\right)$	$\left(1-\frac{3i^2}{2}\right)$
»	40	»	14	$\left(1-\frac{i'^2}{2}\right)$	$\left(1-\frac{3i'^2}{2}\right)$
»	41	»	1	$n_1 i'$	$n^2_1 i'^2$
»	417	»	18	Ma dopo le grandi scoperte, che che tanto onorano	Ma dopo che, le grandi scoperte , che tanto onorano
»	420	»	28	*Mensure*	*Mesure*
»	423	»	10	iu ciascuno	in ciascuno
»	426	»	26	*compliqueé*	*compliquée*
»	»	»	31	*Vaisse au*	*Vaisseau*
»	429	»	4	nei movimenti	nè i movimenti
»	431	»	32	pag. 3	pag. 158
»	432	»	2	pag. 162	pag. 183
»	434	»	7	e in altri	e di altri
»	435	»	9	*jentends*	*j'entends*
»	»	»	19	*et la connaître*	*et le connaître*
»	436	»	12	*en fûit*	*en fût*
»	»	»	17	*repandue*	*répandue*
»	437	»	15	sacri	sagri
»	»	»	27	tra i quali di l'Emo	tra i quali l'Emo
»	»	»	30	*reveleé*	*revelée*
»	438	»	22	*speces*	*espèces*
»	»	»	25	*sout*	*sont*
»	439	»	26	*trasmission*	*transmission*
»	440	»	23	*les un.*	*les uns*
»	»	»	25	*cammencé*	*commence*
»	441	»	22	trovava	trova
»	442	»	28	*cspéces*	*espéces*
»	444	»	19	*Revel*	*Revol.*
»	445	»	3	*intelligenee*	*intelligence*
»	»	»	6	*éloignec*	*éloignée*
»	»	»	26	diriggerebbero	dirigerebbe
»	»	»	27	E Noto	È noto
»	»	»	30	*vrl*	*vrC*
»	447	»	11	*essa projezione*	*essa projezione, e deviazione*
»	»	»	»	E ciò	E ciò
»	448	»	6	$f\frac{\text{sen}l}{2}\theta^2\left(1-\frac{n}{b}f\theta^2\text{sen}l\right)$	$\frac{f\text{sen}l}{2}\theta^2\left(1-\frac{n}{6}f\theta^2\text{sen}l\right)$

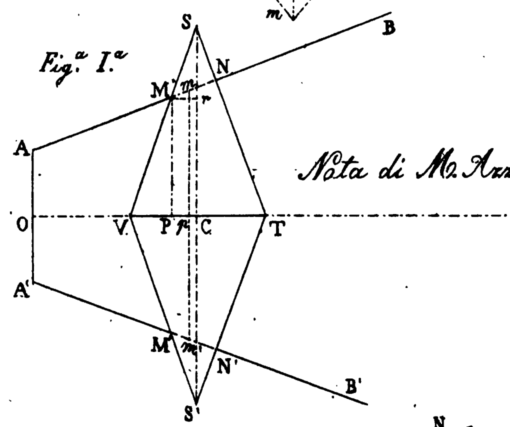
IMPRIMATUR

Fr. Th. M. Larco Ord. Praed. S. P. Ap. Mag. Socius

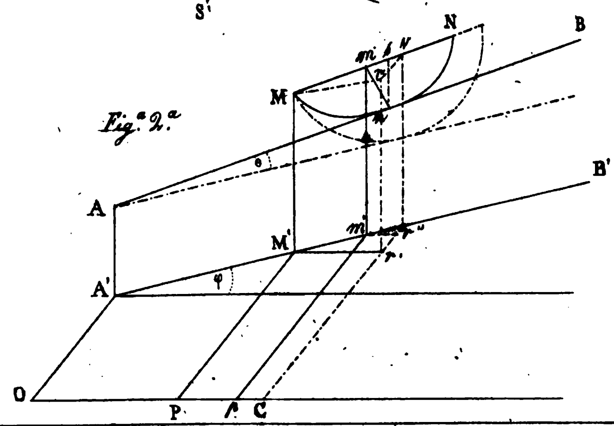
IMPRIMATUR

Fr. Ant. Ligi Archiep. Vicesgerens

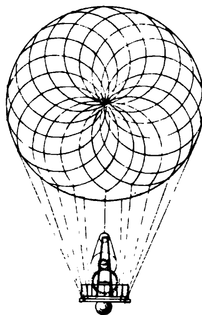




Nota di M. Azzarelli

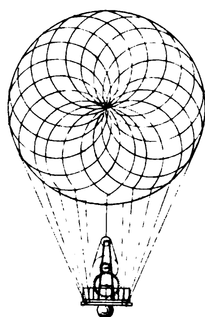


M



 Lit. Toscana

M



Lit. Toscana